TOPOLOGISCHE LAGUERREEBENEN

von

Ulrike Pfüller

aus

Mönchengladbach-Rheindahlen

Diss
Erlangen
1986

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538110_0013

TOPOLOGISCHE LAGUERREEBENEN

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten

der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt

von

Ulrike Pfüller

aus

Mönchengladbach-Rheindahlen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Februar 1986

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. K. Brodersen

Erstberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Salzmann

Zweitberichterstatter: Priv.-Doz.Dr. R. Löwen

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		1
Kapitel 0:	Einführung in das Thema	2
Kapitel 1:	Grundlagen	18
Kapitel 2:	Ebene Laguerreebenen mit einer 7-dimensionalen Gruppe von Automorphismen	40
Kapitel 3:	Ebene Laguerreebenen mit einer 6-dimensionalen Gruppe von Automorphismen	42
Kapitel 4:	Ebene Laguerreebenen mit einer 5-dimensionalen Gruppe von Automorphismen	46
Literaturverzeichnis		63
Lebenslauf		

Einleitung

Klassische Objekte der Geometrie sind - neben den affinen und projektiven Räumen - die Kreisebenen. Durch Topologisierung des Punkt- und Kreisraumes und Stetigkeitsforderungen an die charakteristischen Operationen dieser Strukturen werden Kreisebenen zu einem Untersuchungsgegenstand der topologischen Geometrie. Ordnendes Prinzip für Untersuchung dieser Ebenen ist häufig die Dimension ihrer Automorphismengruppe. K. Strambach hat diesen Ansatz für Möbiusebenen mit mindestens dreidimensionaler Automorphismengruppe verfolgt, und A. Schenkel hat entsprechend Minkowskieebenen untersucht.

Die vorliegende Arbeit behandelt topologische Laguerreebenen, das sind topologische Geometrien, die auf natürliche Weise die Geometrie der ebenen Schnitte eines um seine Spitze k verminderten Kegels K im dreidimensionalen reellen oder komplexen Raum verallgemeinern. Setzt man voraus, daß die Punktmenge P einer topologischen Laguerreebene $\mathbb{L}$ eine Mannigfaltigkeit ist, so folgt aus der Nichtexistenz von stetigen Ovalen in zusammenhängenden, lokal kompakten, endlichdimensionalen projektiven Ebenen (vgl. [BHL 80]), daß P stets zu $K\setminus\{k\}$ homöomorph ist. Dies legt die gesonderte Untersuchung topologisch zwei- und vierdimensionaler lokal kompakter Laguerreebenen nahe. Während für vierdimensionale Laguerreebenen erst in neuester Zeit Modelle gefunden wurden, die nicht zur klassischen komplexen Laguerreebene isomorph sind [Ste 85], verfügte man für zweidimensionale ebene Laguerreebenen seit langem über zahlreiche Konstruktionsprinzipien, die zu nichtmiquelschen Modellen führen [Gr 74] . Die Vielfalt dieser nichtklassischen Modelle legt es nahe, ebene Laguerreebenen mit den bewährten Methoden der von Herrn Salzmann begründeten Schule der topologischen Geometrie zu klassifizieren.
Ziel dieser Arbeit war es, die ebenen Laguerreebenen zu bestimmen, die eine "große", d.h. mindestens fünfdimensionale Liegruppe als Gruppe von Automorphismen zulassen.

Wie bei [Sch 80] sieht man, daß jeder Automorphismus einer ebenen Laguerreebene stetig ist und daß die Gruppe der stetigen Automorphismen von $\mathbb{L}$ eine höchstens siebendimensionale Liegruppe bildet. Bei der klassischen ebenen Laguerreebene ist die Zusammenhangskomponente der Automorphismengruppe isomorph zu einem semidirekten Produkt eines einfach zusammenhängenden vierdimensionalen Normalteilers Δ mit der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$; Δ ist direktes Produkt einer zweidimensionalen abelschen mit der zweidimensionalen nichtabelschen Liegruppe und läßt jede Erzeugende -später Unverbindbarkeitsklasse genannt- des Kegels K als Ganzes invariant.
Im zweiten und dritten Kapitel werden wir zeigen, daß bereits die Existenz einer mindestens sechsdimensionalen Gruppe von Automorphismen erzwingt, daß die klassische Laguerreebene vorliegt.
Im letzten Kapitel der Arbeit wird die ausgezeichnete Rolle solcher ovoidalen Laguerreebenen beleuchtet, die über einem Oval O errichtet werden, dessen affine Spur als die Punktmenge $\{(d,d^k) \mid 0 \leq d \in \mathbb{R}\} \cup \{(-d,cd^k) \mid 0 < d \in \mathbb{R}\}$ dargestellt werden kann. Es zeigt sich, daß für $k \neq 2$ und $c \neq 1$ diese ovoidalen Laguerreebenen die einzigen nichtmiquelschen Laguerreebenen sind, deren volle Automorphismengruppe fünfdimensional ist. Der Beweis dieser Tatsache zerfällt in drei Teile, je nachdem ob in einer Gruppe Γ von Automorphismen der Normalteiler Δ, der jede Unverbindbarkeitsklasse invariant läßt, die Dimension 2,3 oder 4 hat.
Es gibt keine Laguerreebenen, für die $\dim \Gamma/\Delta = 3$ und $\dim \Gamma = 5$ gilt. Hat eine Laguerreebene eine fünfdimensionale Automorphismengruppe Γ mit $\dim \Gamma/\Delta = 2$, so hat man auf dem zur Kreislinie homöomorphen Raum der Unverbindbarkeitsklassen außer einem Fixpunkt soviel Beweglichkeit, daß dies zusammen mit $\dim \Delta = 3$ das Miquelschsein von $\mathbb{L}$ erzwingt.
Die oben beschriebenen nichtklassischen Modelle von Laguerreebenen mit fünfdimensionaler Automorphismengruppe Γ ergeben sich für $\dim \Gamma/\Delta = 1$; also kann die maximale Dimension von Δ dann nicht den Satz von Miquel erzwingen, wenn die Faktorgruppe allzu klein wird.

Die Klassifikation von ebenen Laguerreebenen mit hinreichend großer Automorphismengruppe zeigt deutliche Unterschiede zwischen ebenen Laguerreebenen und ebenen Möbiusebenen; dagegen wird eine gewisse Analogie zur Klassifikation ebener projektiver Ebenen sichtbar. Während bei den Laguerreebenen wie bei den projektiven Ebenen (Moulton-Ebenen) [Sa 67] sich bei der größten Dimension der Automorphismengruppe, die nichtklassische Modelle zuläßt, jeweils eine einzige markante Familie nichtklassischer Modelle ergibt, ufert die Vielfalt der Modelle bei Möbiusebenen bei dieser Grenzdimension der Automorphismengruppe [St 73] aus. Eine weitere interessante Eigenschaft nichtklassischer Laguerreebenen mit fünfdimensionaler Automorphismengruppe ist, daß ihre Automorphismengruppe zykeltransitiv ist, eine Eigenschaft, aus der bei lokal kompakten endlichdimensionalen Möbiusebenen der miquelsche Satz folgt.

Die in dieser Arbeit verwendeten Methoden stammen überwiegend aus der Theorie Liescher Transformationsgruppen auf Flächen und orientieren sich an den von Herrn Salzmann für projektive Ebenen zum ersten Mal eingesetzten Methoden.

Da ich in Darmstadt in der Arbeitsgruppe von Herrn Mäurer gearbeitet und dort mich für topologische Geometrien zu interessieren begonnen hatte, schlug Herr Groh das Thema der vorliegenden Arbeit vor. Da ich bei der Bearbeitung dieses Themas mit den in Darmstadt gepflegten Methoden einerseits auf Schwierigkeiten gestoßen bin und andererseits zum Zentrum der topologischen Geometrie um Herrn Salzmann in Tübingen wissenschaftliche Kontakte hatte, wurde die Betreuung der Arbeit durch Herrn Salzmann und insbesondere durch Herrn Löwen übernommen.
Im letzten Jahr habe ich mich beruflich nach München orientiert; daher hat Herr Strambach in Übereinstimmung mit Herrn Salzmann und Herrn Löwen die Betreuung in ihrer Schlußphase übernommen und mich zur Fertigstellung der Arbeit ermuntert.

Herrn Prof. Dr. H. Groh danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit. Meinen herzlichen Dank möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Strambach für sein reges Interesse und engagierte Unterstützung meiner Arbeit aussprechen.
Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Priv. Doz. Dr. R. Löwen, dessen Ratschläge und konstruktive Kritik das Gelingen dieser Arbeit ganz wesentlich beeinflußt hat. Abschließend möchte ich den Herren Prof. Dr. H. Salzmann, Prof. Dr. H. Mäurer, Prof. Dr. K.H. Hofmann sowie meinen Kollegen Herrn Priv. Doz. Dr. W. Büttner und Herrn Priv. Doz. Dr. E. Hartmann für ihre stete Bereitschaft zu Diskussionen über den Gegenstand dieser Arbeit danken.

KAPITEL 0: Einführung in das Thema

Die Begriffsbildungen[1], die mit dem Gegenstand dieser Arbeit verknüpft sind, leiten sich von einer in der klassischen Geometrie untersuchten Struktur ab. Wir betrachten im projektiven, reellen, dreidimensionalen Raum - $PG(3,\mathbb{R})$ - die folgendermaßen definierte Inzidenzstruktur $(P,Z,\in)$.
Für einen Punkt p_o, eine p_o nicht enthaltende Ebene E_o und einen in E_o liegenden Kreis z_o setzen wir
$P := \bigcup_{r\in z_o} (p_o \vee r \setminus \{p_o\})$ [2] und wählen für Z die Schnitte aller p_o nicht enthaltenden Hyperebenen mit P.
Aufgrund ihrer geometrischen Gestalt bezeichnen wir die Blöcke aus Z als Zykel und nennen zwei verschiedene Punkte aus P verbindbar, wenn sie auf einem Zykel liegen.
In dieser "Kegelschnittgeometrie" stellen wir fest:
Eine "Mantellinie" des Kegels, d.h. eine punktierte Gerade $\{p_o \vee r\}\setminus\{p_o\}$, besteht aus paarweise nicht verbindbaren ("unverbindbaren") Punkten.
Da sich durch zwei Punkte aus verschiedenen Mantellinien immer eine nicht durch p_o laufende Hyperebene legen läßt, sind diese Punkte immer verbindbar. Hieraus rechtfertigt sich die Bezeichnung Unverbindbarkeitsklasse für eine Mantellinie.

Da Ellipsen, Parabeln bzw. Hyperbeln von Geraden in höchstens zwei Punkten geschnitten werden, schneiden Geraden des $PG(3,\mathbb{R})$ die Punktmenge P in höchstens zwei Punkten oder in einer Mantellinie.

---

1) Diese - später präzis definierten - Begriffe sowie ihre axiomatische Verknüpfung, werden im folgenden einführenden Beispiel durch Unterstreichen hervorgehoben.

2) Für Teilmengen M_1, M_2 von $PG(3,\mathbb{R})$ bezeichnen wir mit $M_1 \vee M_2$ den von M_1 und M_2 erzeugten Unterraum von $PG(3,\mathbb{R})$.

Folglich sind drei verschiedene paarweise verbindbare Punkte nicht kollinear und erzeugen somit eine eindeutige Hyperebene. Wir sehen:
Zu je drei verschiedenen paarweise verbindbaren Punkten existiert genau ein Zykel, der diese Punkte enthält.

Sei nun z ein Zykel, p ein Punkt aus z und p' ein mit p verbindbarer Punkt, der nicht auf z liegt. Dann existiert in der durch z definierten Hyperebene von $PG(3,\mathbb{R})$ genau eine Tangente $t(p)$ an den Kegelschnitt z im Punkt p. Die Hyperebene $t(p) \vee p'$ definiert eindeutig den p' enthaltenden Berührzykel z' an z im Punkt p.
Eine Gerade des $PG(3,\mathbb{R})$ schneidet eine, diese Gerade nicht enthaltende, Hyperebene in genau einem Punkt. Hieraus folgt: Ist z ein Zykel, p ein Punkt aus P, dann schneidet die Mantellinie durch p, die z definierende Hyperebene in genau einem Punkt p'. Somit gilt:

Zu jedem Zykel z und zu jedem Punkt p existiert genau ein Punkt p' aus z, der mit p nicht verbindbar ist.
Trivialerweise enthält jeder Zykel mindestens drei Punkte, und es existieren vier Punkte, die nicht auf einem Zykel liegen.

Die Kegelschnittgeometrie gibt Anlaß zur Definition der folgenden Inzidenzstruktur.

Definition 0.01: Eine Inzidenzstruktur $(P,Z,\in)$, deren Blöcke wir Zykel nennen wollen, heißt Laguerreebene, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

1) Sind p_1,p_2,p_3 drei beliebige verschiedene Punkte, die paarweise in Zykeln enthalten sind, dann existiert genau ein p_1,p_2,p_3 enthaltender Zykel. ("Verbinden")

2) Zu jedem Zykel z, jedem Punkt p aus z, und jedem weiteren Punkt p', der auf einem p enthaltenden Zykel liegt, existiert genau ein Zykel z', der p' enthält und mit z nur den Punkt p gemeinsam hat oder mit z zusammenfällt. ("Berühren")

3) Zu jedem Zykel z und jedem Punkt $p \in P$ existiert genau ein Punkt p' aus z, der mit p auf keinem gemeinsamen Zykel liegt, oder es gilt $p' = p$. ("Parallelprojizieren")

4) Jeder Zykel enthält mindestens drei Punkte, und es gibt mindestens vier Punkte, die nicht alle auf einem Zykel liegen.

Diese Axiomatik läßt sich gefälliger formulieren, wenn wir die, in der Kegelschnittgeometrie eingeführten Begriffe Verbindbarkeit bzw. Unverbindbarkeit von Punkten benutzen.

Definition 0.02: Punkte p_1, p_2 aus P heißen unverbindbar, falls $p_1 = p_2$ oder falls p_1 und p_2 auf keinem gemeinsamen Zykel liegen.

Durch diese Definition wird auf P eine Relation "unverbindbar" eingeführt.

Lemma 0.03: Die Relation "unverbindbar" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte der Laguerreebene.

Definition 0.04: Mit Π bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der in Definition 0.02 angegebenen Äquivalenzrelation. Wir nennen diese Klassen Unverbindbarkeitsklassen und bezeichnen für p aus P mit i_p die p enthaltende Unverbindbarkeitsklasse.

Neben ihrer Inzidenzstruktur trägt die Kegelschnittgeometrie eine Reihe topologischer Merkmale, die wir im folgenden herausarbeiten wollen.

Die natürliche Topologie des $\mathbb{R}^4$ sowie die Definition des reellen projektiven dreidimensionalen Raumes erlauben eine Topologisierung des Punkt- bzw. Hyperebenenraumes von $PG(3,\mathbb{R})$.

Die Abbildungen

$f_1 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \{\langle v\rangle \mid v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\}$ mit $f_1(v) := \langle v\rangle$ und

$f_2 : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \{\langle v\rangle^\perp \mid v \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\}$ mit $f_2(v) := \langle v\rangle^\perp$

sind Abbildungen des punktierten $\mathbb{R}^4$ auf den Punkt- bzw. Hyperebenenraum des $PG(3,\mathbb{R})$. Diese Räume können daher mit den Identifizierungstopologien bezüglich der Abbildungen f_i $(i=1,2)$ versehen werden.
Die Operation des Verbindens dreier nichtkollinearer Punkte ist eine stetige Abbildung ihres Definitionsbereiches auf den Hyperebenenraum, und die Topologie des Hyperebenenraumes ist die feinste bezüglich deren die Verbindungsoperation stetig ist.

Wir erhalten nun Topologien auf dem Punkt- bzw. Zykelraum der Kegelschnittgeometrie aus der Topologie des umgebenden Raumes in natürlicher Art und Weise:
P wird mit der Spurtopologie bezüglich des Punktraumes von $PG(3,\mathbb{R})$ versehen. Nach Herausnahme einer Hyperebene durch p_o wird P im dabei entstehenden affinen Raum durch einen Zylinder, d.h. durch eine zu $S_1 \times \mathbb{R}$ homöomorphe Teilmenge, beschrieben.

Z erhält die Identifizierungstopologie bezüglich der Abbildung $\langle v\rangle^\perp \to \langle v\rangle^\perp \cap P$ (mit $p_o \notin \langle v\rangle^\perp$). Damit folgt unmittelbar, daß das Verbinden dreier verbindbarer Punkte stetig ist. Die Topologien auf P und Z reflektieren die anschauliche Vorstellung des "Naheseins" von Punktepaaren, Zykelpaaren, oder Punkt-Zykelpaaren und lassen die Stetigkeit der Operationen des Schneidens von Zykeln, Berührens und Parallelprojizierens erwarten.

Wie üblich wird man auch im Falle der Laguerreebenen erwarten dürfen, daß topologische Zusatzbedingungen (die sich an der Kegelschnittgeometrie orientieren) die Möglichkeiten für solche Strukturen einengen. Wir definieren:

Definition 0.05: Eine topologische Laguerreebene ist eine Laguerreebene, deren Punkt- bzw. Zykelraum Topologien tragen, so daß die Operationen des Verbindens, Berührens, Schneidens und Parallelprojizierens auf ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Die folgende spezielle Klasse von topologischen Laguerreebenen orientiert sich noch stark an den topologischen Gegebenheiten der Kegelschnittgeometrie.

Definition 0.06: Eine ebene topologische Laguerreebene ist eine topologische Laguerreebene, deren Punktraum zu $S_1 \times \mathbb{R}$ homöomorph ist.

Ein erstes Beispiel für eine ebene topologische Laguerreebene ist die Kegelschnittgeometrie (im folgenden auch "klassisches Modell" genannt). Eng verwandt sind die ovoidalen Laguerreebenen. Diese erhält man, indem man den im klassischen Modell verwendeten Kreis z_0 durch ein Oval ersetzt und dann Punkte und Zykel analog zur Kegelschnittgeometrie definiert. Eine solche Ebene ist nach [Gr 74; Theorem 4.2] eine ebene topologische Laguerreebene, falls das definierende Oval zu S_1 homöomorph ist. Auch die topologischen ovoidalen Laguerreebenen erhalten ihre Topologien von der Topologie des umgebenden projektiven Raumes.

Die Topologien des Punkt- bzw. Zykelraumes einer topologischen Laguerreebene sind nicht unabhängig wählbar, sondern bestimmen sich gegenseitig auf eindeutige Art und Weise [Gr 68; Satz 2.12]. Bei vorgegebener Topologie auf dem Punktraum ist die Topologie des Zykelraumes charakterisiert als die feinste Topologie bezüglich deren das Verbinden stetig ist [Gr 68; Satz 2.11a)]. Die Bestimmungsstücke einer ebenen topologischen Laguerreebene sind topologisch vollständig bestimmt und homöomorph zu denen der Kegelschnittgeometrie. Es gilt:

Satz 0.07: Sei $(P,Z,\in)$ eine ebene topologische Laguerreebene. Dann folgt:

a) $P \approx S_1 \times \mathbb{R}$

b) $Z \approx \mathbb{R}^3$

c) $z \in Z \Rightarrow z \approx S_1$

d) $i_p \in \Pi \Rightarrow i_p \approx \mathbb{R}$

e) $\Pi \approx S_1$, falls Π mit der Identifizierungstopologie bezüglich der Abbildung $p \to i_p$, die P auf Π abbildet, versehen wird.

Beweis: Den Beweis von a) bis d) findet man bei [Gr 69; Satz 3.8].

zu e): Unter der angegebenen Abbildung wird ein Zykel bijektiv auf Π abgebildet. c) und die Stetigkeit des Parallelprojizierens implizieren e).

Ein bewährtes Klassifizierungsprinzip der Geometrie ordnet geometrische Strukturen nach ihrer Automorphismengruppe. Wie üblich definieren wir

Definition 0.08:

a) Ein Laguerreautomorphismus einer Laguerreebene $(P,Z,\in)$ ist eine Bijektion der Punktmenge P auf sich, die Zykel in Zykel überführt.

b) Ein stetiger Automorphismus einer topologischen Laguerreebene $(P,Z,\in)$ ist ein Laguerreautomorphismus der Ebene, der auf der Punktmenge P einen Homöomorphismus bewirkt.

Für die später definierten ebenen Laguerreebenen ergibt sich die Stetigkeit eines Automorphismus aus einem entsprechenden Satz für ebene Ebenen [Sa 67; Th. 3.5].
Für eine Gruppe H von (stetigen) Automorphismen einer ebenen topologischen Laguerreebene $(P,Z,\in)$ bezeichnen wir den Stabilisator der Elemente einer Teilmenge $M = \{m_1,\ldots,m_n\}$ von P, Z, Π oder $P \times Z$ mit $H_{m_1,\ldots,m_n}$.

Topologische Eigenschaften der vollen Automorphismengruppe Γ^* einer topologischen Laguerreebene wurden bereits untersucht. Nach A. Schenkel [Sch 77; Satz 43] läßt sich Γ^* mit der kompakt-offenen Topologie zu einer topologischen Transformationsgruppe [Be 72; S.2] auf dem Punktraum P machen. Auch auf dem Zykelraum Z induziert Γ^* eine topologische Transformationsgruppe. Schenkel zeigt weiterhin, daß Γ^* eine Liegruppe ist [Sch 77; Satz 44]. Damit läßt sich für Γ^* ein Dimensionsbegriff erklären und nachweisen [Sch 77, S.34], daß für eine topologische Laguerreebene die Dimension ihrer Automorphismengruppe Γ^* höchstens 8 sein kann. [1)]

Entsprechend der Vorgehensweise bei topologischen Ebenen [Sa 67; TP], bei topologischen Möbiusebenen [Str 72, 73] und bei topologischen Minkowskiebenen [Sch 80] bietet sich auch hier die Dimension von Automorphismengruppen als klassifizierendes Prinzip an.

In dieser Arbeit bezeichnet Γ immer eine zusammenhängende[2)], abgeschlossene Gruppe von Automorphismen einer topologischen Laguerreebene. Da Γ^* höchstens 8-dimensional ist, gilt dies auch für Γ. In den Kapitel 2,3,4 untersuchen wir Ebenen mit 7-, 6- bzw. 5-dimensionaler Gruppe Γ.

Wir werden mehrfach die Dimensionen des transformierten Bereiches und der darauf wirkenden Transformationsgruppe durch den folgenden Satz verknüpfen:

Satz 0.09: Für eine zusammmenhängende abgeschlossene Untergruppe H von Γ gilt die Dimensionsformel

$$\dim H = \dim H_a + \dim a^H \qquad (a \in P \text{ oder } a \in Z).$$

---

1) Wir werden diese obere Schranke später auf 7 reduzieren.

2) Um die Vorteile des Zusammenhangs einer topologischen Gruppe nutzen zu können, werden wir häufig eine Gruppe H durch ihren maximalen zusammenhängenden Normalteiler H_1 ersetzen. Bei diesem Übergang bleibt die Dimension erhalten.

Unter a^H verstehen wir die Bahn von a unter H. Ist a^H einfach zusammenhängend, so ist H_a zusammenhängend [Sa 67; TP, 3.17].

Laguerreebenen hängen eng mit affinen Ebenen zusammen. Diese lassen sich nämlich als "Erweiterungen" affiner Ebenen auffassen.

Definition 0.10: Für eine Laguerreebene $(P,Z,\in)$ und für $p \in P$ bezeichnen wir mit A_p die Inzidenzstruktur mit Punktmenge $P \setminus \{q \in i_p\}$, deren Blockmenge aus $\Pi \setminus \{i_p\}$ und aus den p enthaltenden Zyklen besteht; wir nennen A_p die Ableitung der Laguerreebene in p.

Aus den Axiomen der Laguerreebene folgt unmittelbar

Lemma 0.11: Für jeden Punkt $p \in P$ ist A_p eine affine Ebene.

Bemerkung 0.12: Wie wir später an einem Beispiel sehen werden, können Ableitungen in verschiedenen Punkten zu nichtisomorphen Ebenen führen.

Die uns interessierenden ebenen topologischen Laguerreebenen besitzen einen zu $S_1 \times \mathbb{R}$ homöomorphen Punktraum (siehe Satz 0.07). Herausnahme einer Unverbindbarkeitsklasse ergibt also einen zu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ homöomorphen Punktraum für die Ableitung. Genauer gilt:

Lemma 0.13:

a) Die mit einer ebenen topologischen Laguerreebene assoziierten Topologien definieren auf dem Punkt- bzw. Geradenraum der Ableitung nach einem Punkt p durch Spurbildung Topologien, bezüglich deren diese Ableitung zu einer affinen $\mathbb{R}^2$-Ebene wird.

b) Für $p \in P$ induziert Γ_p in der affinen Ebene A_p eine Gruppe von stetigen Automorphismen der Ebene.

In einer grundlegenden Arbeit [Sa 67; TP] hat Salzmann die topologischen $\mathbb{R}^2$-Ebenen mit hinreichend großer Automorphismengruppe untersucht und bestimmt.
Eines der Prinzipien dieser Arbeit wird es sein, Informationen über eine gegebene abstrakte Laguerreebene in die Ableitung zu übertragen und zu versuchen, die Salzmann'sche Klassifikation zu verwenden. Wir geben daher kurz diejenigen topologischen $\mathbb{R}^2$-Ebenen an, die bei unseren Untersuchungen auftreten.
Neben der klassischen desarguesschen Ebene sind dies vor allem die (nichtdesarguesschen) Moultonebenen. Diese sind die einzigen nichtdesarguesschen affinen Ebenen mit 4-dimensionaler Kollineationsgruppe K. Die Gruppe K läßt genau einen Punkt der Ebene fest und ist semidirektes Produkt einer 3-dimensionalen Gruppe, die zur $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ (einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe von $PSL_2(\mathbb{R})$) isomorph ist, mit einer 1-dimensionalen Gruppe, die zu $\mathbb{R}$ isomorph ist [Sa 63; Hauptsatz 2.6].

Ist für ein $p \in P$ die Ableitung A_p desarguessch, dann werden duch die folgenden Bemerkungen die Gruppen Γ_p bestimmt.

Bemerkung 0.14: Sei $(P,Z,\in)$ eine ebene topologische Laguerreebene, und für ein $p \in P$ sei A_p desarguessch.
Ist Γ_p 5-dimensional, dann ist nach einem Resultat von Salzmann [Sa 67; TP 5.5] A_p desarguessch.
Wir identifizieren A_p mit dem $\mathbb{R}^2$, indem wir in A_p als Nullpunkt den Schnitt einer Unverbindbarkeitsklasse i_p, mit einem durch p laufenden Zykel z wählen und Punkte e, f auf i_p, bzw. z als Basis[1] verwenden. Dann gilt:

a) $(\Gamma_p)_1$ ist enthalten in

$$\{v \xrightarrow{\tau_a} v+a \mid v,a \in A_p\} \cdot \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \mid c,d > 0,\ b \in \mathbb{R}\} ,$$

der Gruppe aller Kollineationen von A_p, die $\Pi \setminus \{i_p\}$ invariant lassen. $(\Gamma_p)_1$ ist also auflösbar.

---

1) Gelegentlich werden wir die Reihenfolge der Basisvektoren vertauschen. Die Aussage von 0.14 ist dann sinngemäß abzuändern.

b) $\{v \to v+a \mid v \in A_p,\ a \in i_p,\} \cdot \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid c > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ ist die Gruppe aller Kollineationen von A_p, die $\Pi \setminus \{i_p\}$ geradenweise festlassen.

c) $\{v \to v+a \mid v \in A_p,\ a \in i_p,\} \cdot \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}$ ist die von den Translationen in Richtung i_p, und den Elationen mit Achse i_p, erzeugte (abelsche) Gruppe, die scharf transitiv auf den Geraden von A_p, die von Zykeln durch p stammen, operiert. ∎

Auf den verschiedenen Teilstrukturen einer ebenen topologischen Laguerreebene (Punkte, Zykel, Unverbindbarkeitsklassen) induziert Γ Wirkungen, die die Struktur von Γ als abstrakte Gruppe einschränken. Gemäß der Definition der Topologie auf Π (Satz 0.07e)) induziert Γ eine stetige Wirkung auf Π. Der Kern Δ dieser Wirkung besteht aus allen Automorphismen von Γ, die jede einzelne Unverbindbarkeitsklasse (als Ganzes) invariant lassen, und ist ein abgeschlossener, nicht offener Normalteiler von Γ. Γ sowie Γ/Δ sind Liegruppen, und die zusammenhängende[1] Gruppe Γ/Δ induziert eine lokalkompakte effektive (d.h. nur die identische Abbildung wirkt trivial auf Π) Transformationsgruppe auf der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit Π. Ebenso induziert die Liegruppe Δ auf den 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten i_p lokalkompakte (im allgemeinen nicht zusammenhängende) Transformationsgruppen. Für die Bestimmung der lokalkompakten, zusammenhängenden, effektiven und transitiven Transformationsgruppen 1-dimensionaler Mannigfaltigkeiten gilt der folgende Klassifikationssatz von Brouwer (1909).

Satz 0.15: [Be 72, S.97]

a) Eine lokalkompakte, zusammenhängende, transitive und effektive Transformationsgruppe G der Kreislinie S_1 ist als Transformationsgruppe isomorph zur Drehgruppe

---

1) Da Δ nicht offen ist, muß Γ/Δ zusammenhängend sein.

SO_2 oder zu den endlichen Überlagerungen $PSL_2(\mathbb{R})^{(k)}$ der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ für $k \geq 1$ in den natürlichen Wirkungen dieser Gruppen.

b) Eine lokalkompakte, zusammenhängende, transitive und effektive Transformationsgruppe G der Zahlengeraden $\mathbb{R}$ ist als Transformationsgruppe isomorph zu $\mathbb{R}$, L_2 oder zu der einfach zusammenhängenden Überlagerung $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ in den natürlichen Wirkungen dieser Gruppen.

c) Eine lokalkompakte, zusammenhängende, transitive und effektive Transformationsgruppe auf einer reellen 1-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist höchstens 3-dimensional.

Wegen ihrer Bedeutung für diese Arbeit beschreiben wir die, im Satz von Brouwer erwähnten, nicht abelschen Gruppen.

Definition 0.16 : L_2 bezeichne die 1-Zusammenhangskomponente der affinen Gruppe von $\mathbb{R}$, d.h.
$L_2 := \{x \to ax+b \mid b,x \in \mathbb{R},\ a > 0\}$.

Lemma 0.17:

a) Die "Translationen" in L_2, d.h.
$T := \{x \to x+b \mid b,x \in \mathbb{R}\}$ bilden den minimalen Normalteiler von L_2. Es gilt $L_2 = T \cdot (L_2)_0$.

b) Eine Matrizendarstellung von L_2 wird durch die Matrizengruppe $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$ gegeben.

c) Durch Konjugation zerlegt L_2 den Normalteiler T in 3 Bahnen.

d) Die stetigen äußeren Automorphismen von L_2 bilden eine Gruppe der Ordnung 2.

Beweis: a)-c) folgen aus elementarer Rechnung.

Zu d): Die Konjugation der Gruppe L_2 in der affinen Gruppe von $\mathbb{R}$ durch $f : x \to -x$ läßt diese Gruppe invariant und definiert einen äußeren Automorphismus.
Der Normalteiler T ist charakteristisch in L_2 und daher unter $H := \mathrm{Aut}\, L_2$ invariant.
Nehmen wir an, $H \supsetneq L_2 \cdot \langle f \rangle$. Da $L_2 \cdot \langle f \rangle$ zweifach transitiv auf den nichttrivialen Elementen aus L_2^T operiert, können wir ein h aus $H \setminus L_2 \cdot \langle f \rangle$ finden, das $t_1 : x \to x+1$ und $g_1 : x \to 2x$ festläßt. Die Fixpunkte des Automorphismus h bilden eine nichtkommutative Untergruppe U von L_2.
t_1 erzeugt die Gruppe $\{x \to x+n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, g_1 erzeugt die Gruppe $\{x \to 2^n x \mid n \in \mathbb{Z}\}$, und $\langle t_1, t_1^{g_1} \rangle \subseteq U$ erzeugt eine dichte Untergruppe von T, auf der h trivial operiert. Wegen der Stetigkeit von h umfaßt U die Gruppe T. Da h das Element g_1 festläßt, bleibt auch $(L_2)_0$ sowie $((L_2)_0)^{t_1}$ unter h invariant.
Ein Nichtfixpunkt ℓ von h aus $((L_2)_0)^{t_1}$ hat die Form $\ell = t \cdot g$ $(t \in T \setminus \{id\}, g \in (L_2)_0 \setminus \{id\})$. $\ell^h = t \cdot g^h$ liegt ebenfalls in $((L_2)_0)^{t_1}$ und vertauscht also mit ℓ. Elemente der Form $t \cdot g$ bzw. $t \cdot g'$ vertauschen aber genau dann, falls $g = g'$. Folglich läßt h auch $((L_2)_0)^{t_1}$ punktweise fest und ist daher die Identität. Es folgt $H = L_2 \cdot \langle f \rangle$.

∎

Wir geben nun eine elementare Herleitung der Überlagerungsgruppen der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ an und beweisen Eigenschaften dieser Gruppen.

Durch die Parametrisierung $f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$ $(t \in \mathbb{R})$ wird eine Schraubenlinie im $\mathbb{R}^3$ mit Ganghöhe 1 beschrieben. Mit S bezeichnen wir die Punktmenge $f(\mathbb{R})$.
Die Orthogonalprojektion p des $\mathbb{R}^3$ auf die x-y-Ebene bildet S auf den Einheitskreis K ab und ist eine stetige, surjektive Abbildung von S auf K.

Bekanntlich gilt [H.-P. 73, Theorem 2.37]:
Die Kollineationen der reellen projektiven Ebene, die einen Kegelschnitt invariant lassen, bilden eine zu $PGL_2(\mathbb{R})$ isomorphe Gruppe, die einen 2-fach transitiven zu $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorphen Normalteiler enthalten. Folglich existiert eine zu $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorphe 2-fach transitive, 3-dimensionale Transformationsgruppe G von K. Diese wird von je zwei ihrer Standgruppen erzeugt. Wir konstruieren aus G eine Transformationsgruppe auf S.
Für $k_o \in K$ operiert G_{k_o} transitiv auf $K \setminus \{k_o\}$.
$p^{-1}(k)$ bezeichne die "über k liegenden Punkte" von S (Fasern). Es folgt $S \setminus p^{-1}(k_o) = \dot{\cup} U_i$ mit $p(U_i) = K \setminus \{k_o\}$, und
$p_i := p|U_i$ liefert einen Homöomorphismus von U_i auf $K \setminus \{k_o\}$.
(U_i sind also die maximalen, keinen Punkt aus der Faser $p^{-1}(k_o)$ enthaltenden zusammenhängenden Teilmengen von S.)
Für g aus G_{k_o} wird durch

$$x^{\tilde{g}} := \begin{cases} x & \text{für } x \in p^{-1}(k_o) \\ x^{p_i g p_i^{-1}} & \text{für } x \in U_i \end{cases}$$

eine stetige Bijektion von S auf S erklärt.
Wir setzen $\tilde{G}_{k_o} := \{\tilde{g} \mid g \in G_{k_o}\}$. $\tilde{G}_{k_o}$ permutiert die Faserung von S und bildet eine Gruppe von stetigen Transformationen von S. Weiterhin gilt $\tilde{G}_{k_o} \cong G_{k_o}$.
Entsprechend wird für $k_1 \in K \setminus \{k_o\}$ eine Gruppe $\tilde{G}_{k_1}$ definiert.
Eine weitere Gruppe von stetigen Transformationen von S bilden gewisse Translationen des $\mathbb{R}^3$ in z-Richtung.

$T := \{\tau_n : S \to S \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit $\tau_n(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t+n)$ $(t \in \mathbb{R})$.

$\tilde{G} := \langle T, \tilde{G}_{k_o}, \tilde{G}_{k_1} \rangle$ ist eine transitive Gruppe von stetigen Transformationen, deren Zentrum T enthält. $\tilde{G}$ operiert transitiv auf der Faserung von S und besitzt einen T umfassenden Ineffektivitätskern N.

Da T scharf transitiv auf $p^{-1}(k_o)$ operiert und im Zentrum von $\tilde{G}$ liegt, folgt $N = T \times N_\alpha$ $(\alpha \in p^{-1}(k_o))$, und N_α operiert trivial auf $p^{-1}(k_o)$.
Wir wählen U_i mit $\alpha \in \partial U_i$, $n \in N_\alpha$ und ein maximales Intervall I in U_i auf dem n keine Fixpunkte besitzt. Auf $n(I) =: I'$ besitzt dann n ebenfalls keine Fixpunkte. Da n die Fasern $p^{-1}(k)$ invariant läßt, gilt für ein $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ aus S entweder $\beta^n = \beta$ oder $|\beta_3 - (\beta^n)_3| \geq 1$. Wegen der Maximalität von I existiert ein β_o aus ∂I mit $\beta_o^n = \beta_o$. Konvergiert eine Folge (β_k) aus I gegen β_o, dann gilt $|(\beta_k)_3 - (\beta_k^n)_3| \geq 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und dies steht im Widerspruch zur Stetigkeit von n. Also operiert n auch auf U_i trivial und daher sogar trivial auf S. Es folgt $N = T$.

Wir zeigen $\tilde{G}/_T = PSL_2(\mathbb{R})$:

Für $\tilde{g} \in \tilde{G}$ wird durch $k^{f(\tilde{g})} := (p^{-1}(k))^{\tilde{g}p}$ eine Transformation $f(\tilde{g})$ von K definiert. f ist ein auf $\tilde{G}$ erklärter, stetiger Homomorphismus mit Kern T.
Für $\tilde{g} \in \tilde{G}_{k_i}$ $(i \in \{0,1\})$ liegt $f(\tilde{g})$ in G, und folglich ist f ein Homomorphismus von $\tilde{G}$ auf G, d.h. $\tilde{G}/_T \cong G \cong PSL_2(\mathbb{R})$.

Die so konstruierte Transformationsgruppe $\tilde{G}$ auf $S \approx \mathbb{R}$ wird üblicherweise als $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ notiert und als universelle Überlagerungsgruppe von $PSL_2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Aus der Definition dieser Gruppe leiten wir ab:

Lemma 0.18: $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ ist nicht zerfallende zentrale Erweiterung von T durch $PSL_2(\mathbb{R})$, die auf $\mathbb{R}$ transitiv operiert.

Beweis: Aus der Konstruktion von $\tilde{G} = \widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ folgt die Transitivität der Wirkung auf S. Nehmen wir an, $\tilde{G} = T \times C$ mit $C \cong PSL_2(\mathbb{R})$. Operiert C nicht transitiv auf S, dann besitzt C universelle Fixpunkte. Ist α ein solcher mit $\alpha \in p^{-1}(k)$, dann läßt $G = f(C)$ den Punkt k fest im Widerspruch zur Transitivität von G auf K. Also operiert C

transitiv auf $S \approx \mathbb{R}$. Folglich existiert ein $g \in C$ mit $p = q^g$ und $f(p) = f(g)$.
Die Standgruppen C_p und C_q sind konjugiert unter g, d.h. g liegt im Normalisator $N_C(C_q)$. Da aber C_q maximal ist (Maximalität wird von dem Homomorphismus f erhalten, und die Standgruppen der $PSL_2(\mathbb{R})$ sind maximal), gilt $N_C(C_q) = C_q$. Somit liegt g in C_q im Widerspruch zur Transitivität von C auf S. ∎

Effektive und transitive Transformationsgruppen auf S_1 lassen sich aus der Gruppe $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ durch Faktorisieren gewinnen.

Nach Konstruktion von $\tilde{G}$ ist T ein diskreter Normalteiler. Wegen der (algebraischen) Einfachheit von $\tilde{G}/T \cong PSL_2(\mathbb{R})$ ist T sogar der maximale Normalteiler von $\tilde{G}$. Damit liegt jeder Normalteiler von $\tilde{G}$ in $T \cong \mathbb{Z}$. Ein von T verschiedener Normalteiler N ist folglich zu einer echten Untergruppe von $\mathbb{Z}$, also einer Gruppe $k\cdot\mathbb{Z}$, isomorph. Die Gruppe $\tilde{G}/N$ ist topologisch einfach, ihr maximaler Normalteiler bestimmt sich nach dem Korrespondenzprinzip[1] als $T/N \cong \mathbb{Z}/k\cdot\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_k$. Durch die natürliche Zahl k wird N und damit $\tilde{G}/N$ eindeutig festgelegt. Für diese Gruppe ist die Bezeichnung $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ üblich (k-blättrige Überlagerungsgruppe von $PSL_2(\mathbb{R})$). Auch die Gruppen $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ sind nicht zerfallende Erweiterungen ihres Zentrums.

Geometrische Wirkungen der Gruppen $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ lassen sich folgendermaßen erklären:
Wir führen auf S eine Äquivalenzrelation $\tilde{k}$ ein.
$(x,y,z)\ \tilde{k}\ (x',y',z') \iff x = x',\ y = y',\ z = z'+k\,m$ mit $m \in \mathbb{Z}$.
S zerfällt in Äquivalenzklassen bezüglich $\tilde{k}$.

---

1) Darunter verstehen wir die Isomorphie zwischen dem Untergruppenverband von G/N und dem Verbandsintervall $[N,G]$ (d.h. allen N umfassenden Untergruppen von G).

Die Menge dieser Äquivalenzklassen ist zu S_1 homöomorph. Die (x,y,z) enthaltende Klasse ist gerade der (x,y,z) enthaltende Orbit des Normalteilers N. Bekanntlich operiert eine transitive Gruppe auf den Orbits eines Normalteilers transitiv. Folglich induziert $\tilde{G}/N$ eine effektive und transitive Transformationsgruppe auf den Äquivalenzklassen bezüglich $\sim_k$, und wir haben damit den ersten Teil des folgenden Lemmas bewiesen.

Lemma 0.19:

a) Die aus $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ durch Faktorisierung entstehenden Gruppen $PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ induzieren auf S_1 effektive und transitive Wirkungen.

b) Sind $N \subset M$ Normalteiler von $\tilde{G}$ mit $\tilde{G}/N \cong PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ und $\tilde{G}/M \cong PSL_2{}^{(k')}(\mathbb{R})$, dann ist $PSL_2{}^{(k')}(\mathbb{R})$ eine Faktorgruppe von $PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ und k' teilt k.

c) Genau für $k = 2$ ist $PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ zu $SL_2(\mathbb{R})$ isomorph.

Beweis: b) Nach einem Homomorphiesatz gilt $\tilde{G}/M \cong \left(\tilde{G}/N\right)/\left(M/N\right)$. Entsprechend der Festlegung von k durch N folgt $\mathbb{Z}_k \cong T/N$, $\mathbb{Z}_{k'} \cong T/M$ und damit $T/M \cong \left(T/N\right)/\left(M/N\right)$. Die zyklische Gruppe T/M der Ordnung k' ist daher Faktorgruppe der zyklischen Gruppe T/N der Ordnung k, und somit erhalten wir k' teilt k.

c) Der maximale Normalteiler von $SL_2(\mathbb{R})$ hat Ordnung 2, und für $k = 2$ hat der maximale Normalteiler der Gruppe $PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ Ordnung 2.
Um zu zeigen, daß $PSL_2{}^{(k)}(\mathbb{R})$ und $SL_2(\mathbb{R})$ isomorph sind, benutzen wir folgende Charakterisierung der Gruppe $SL_2(\mathbb{R})$. Ist G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G der Ordnung 2 und gilt $G/N \cong PSL_2(\mathbb{R})$, dann sind G und $SL_2(\mathbb{R})$ isomorph oder G ist direktes Produkt von $PSL_2(\mathbb{R})$ mit N. Damit ist auch Teil c) des Lemmas bewiesen. ∎

KAPITEL 1: Grundlagen

In diesem Kapitel werden Sätze und Hilfssätze bereitgestellt, die in den späteren Kapiteln mehrfach benutzt werden. Wir haben in der Einführung auf den engen Zusammenhang zwischen affinen Ebenen und Laguerreebenen hingewiesen. Die folgenden Aussagen über Gruppen von Zentralkollineationen werden nützlich sein.

Hilfssatz 1.01: $P := (P,L)$ bezeichne eine ebene projektive Ebene und H eine abgeschlossene, zusammenhängende Gruppe von Elationen (Homologien) mit gemeinsamer Achse ℓ_H und gemeinsamem Zentrum z_H.
Dann ist H eine 1-dimensionale Gruppe.

Beweis: (Für den Fall von Elationen) Wir wählen eine Gerade ℓ mit $\ell \neq \ell_H$ und $z_H \in \ell$. Dann ist ℓ invariant unter H, und z_H ist der einzige Fixpunkt der Elemente aus H auf ℓ. $\ell \setminus \{z_H\}$ ist zu $\mathbb{R}$ homöomorph; auf $\ell \setminus \{z_H\}$ operiert H effektiv und ohne universelle Fixpunkte. Nach 1.03 operiert H dann sogar transitiv auf $\ell \setminus \{z_H\}$, und aus der Dimensionsformel folgt $\dim H = 1$. ∎

Bemerkung 1.02: Sei H eine abelsche Gruppe von Zentralkollineationen mit gemeinsamer Achse.
Enthält H Elationen, dann kann H keine Homologien enthalten.

Beweis: Sei ℓ_H die Achse der Elemente aus H, $g_1 \neq id$ eine Elation aus H, g_2 eine nichttriviale Homologie aus H und A das Zentrum von g_2. Dann liegt A nicht auf ℓ_H.
Da H abelsch ist, gilt $A^{g_1} = (A^{g_2})^{g_1} = (A^{g_1})^{g_2}$. Demnach ist A^{g_1} ein Fixpunkt von g_2 und daher entweder gleich A oder einem Element der Achse ℓ_H. Die zweite Alternative wird ausgeschlossen, da g_1 eine Elation ist und daher Punkte außerhalb der Achse ℓ_H nicht auf Punkte der Achse ℓ_H

abbilden kann. Somit gilt $A^{g_1} = A$. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß g_1 eine Elation ist und daher keinen Fixpunkt außerhalb der Achse ℓ_H haben kann. ∎

Für Transformationsgruppen auf reellen 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten läßt sich an der Fixpunktstruktur dieser Gruppen ihr Transitivitätsverhalten erkennen.

Bemerkung 1.03: Eine zusammenhängende Transformationsgruppe G einer reellen 1-dimensionalen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M operiert genau dann transitiv auf M, falls G keine universellen Fixpunkte besitzt.

Beweis: Wir nehmen an, daß G keine universellen Fixpunkte auf M besitze. Reelle 1-dimensionale, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten sind zu $\mathbb{R}$ oder S_1 homöomorph.
Für m aus M ist die Bahn m^G eine zusammenhängende Teilmenge von M. Ist m^G echte Teilmenge von M, dann ist m^G ein "Intervall" (wir identifizieren hier M mit $\mathbb{R}$ oder S_1) mit Randpunkten a,b. Die Menge $\{a,b\}$ bleibt unter G fest. Da G zusammenhängend ist, wären a,b universelle Fixpunkte im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich gilt $m^G = M$, und die Bemerkung ist bewiesen. ∎

Wie schon in Kapitel 0 erwähnt, bezeichnet Γ in dieser Arbeit eine zusammenhängende, abgeschlossene Gruppe von Automorphismen einer ebenen Laguerreebene $(P,Z,\in)$. Der Ineffektivitätskern der Wirkung von Γ auf Π bezeichnen wir mit Δ.
Die folgenden 4 Aussagen klären die Fixpunktstruktur von Untergruppen von Γ in ihrer Wirkung auf der Punktmenge P bzw. den Unverbindbarkeitsklassen Π der Ebene.

Hilfssatz 1.04:

a) Eine zusammenhängende Untergruppe U von Γ besitze auf zwei Unverbindbarkeitsklassen i_{p_1}, i_{p_2} je zwei Fixpunkte, und U bestehe nicht nur aus der Identität.
Dann operiert U auf jeder weiteren U-invarianten Unverbindbarkeitsklasse transitiv.

b) $(P,Z,\in)$ bezeichne eine (nicht notwendig topologische) Laguerreebene und γ einen Laguerreautomorphismus mit $\gamma^2 \neq id$, der zwei Unverbindbarkeitsklassen punktweise festläßt. Dann läßt γ jede Unverbindbarkeitsklasse invariant.

Beweis: a) Nehmen wir an, U operiere auf einer von i_{p_1}, i_{p_2} verschiedenen Unverbindbarkeitsklasse i_{p_3} nicht transitiv. Dann existiert auf i_{p_3} ein Fixpunkt von U, den wir mit p_3 bezeichnen dürfen. In A_{p_3} induziert U eine Gruppe von Kollineationen, die das Viereck - gebildet von den vier von p_3 verschiedenen Fixpunkten - festläßt. Dies ist nach [Sa 67; TP Cor. 3.6] nicht möglich.

b) Wir behalten die bisher verwendete Notation bei und bezeichnen mit i_{p_1}, i_{p_2} zwei Unverbindbarkeitsklassen auf denen γ trivial operiert.
Nehmen wir an, γ induziert in A_{p_1} eine Homologie mit Achse i_{p_2} und Zentrum A_1 im Abschluß von A_{p_1}. Dann induziert γ auch in A_{p_2} eine Homologie mit Achse i_{p_1} und Zentrum A_2 im Abschluß von A_{p_2}.
Folglich läßt γ eine Schar Z_1 (Z_2) von Zykeln durch p_1 (p_2), die sich nur in p_1 (p_2) schneiden, fest. Sei p ein Punkt aus $P \setminus \{i_{p_1} \cup i_{p_2}\}$, der nicht auf dem (eindeutig bestimmten) Zykel aus $Z_1 \cap Z_2$ liegt. Dann existieren Zykel $z_i \in Z_i$ $(1 \leq i \leq 2)$, so daß p in $z_1 \cap z_2$ liegt. $z_1 \cap z_2$ ist eine höchstens zweielementige γ-invariante Menge. Wegen $\gamma^2 \neq id$, läßt γ jeden Punkt in $z_1 \cap z_2$, also auch p fest. Dann induziert γ in A_p eine Kollineation mit den beiden Achsen i_{p_1}, i_{p_2}, ein Widerspruch. Folglich läßt γ jede Unverbindbarkeitsklasse fest. ∎

Lemma 1.05: U bezeichne eine kompakte, zusammenhängende Untergruppe von Γ.

a) Läßt U eine Unverbindbarkeitsklasse fest, dann operiert U trivial auf dieser.

b) U läßt höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen fest.

c) U ist nicht in Δ enthalten.

Beweis: a) Nehmen wir an, eine kompakte Untergruppe U von Γ lasse eine Unverbindbarkeitsklasse i_p fest, und Ω bezeichne einen nichttrivialen Orbit von U auf i_p. Dann ist Ω eine kompakte, zusammenhängende Teilmenge von $i_p \approx \mathbb{R}$, also ein abgeschlossenes Intervall. Die beiden Randpunkte werden durch Elemente aus U festgelassen oder vertauscht und bilden daher einen (oder zwei) Orbits von U im Widerspruch zur Definition von Ω. Also operiert U trivial auf i_p.

b) Läßt U drei Unverbindbarkeitsklassen fest, dann operiert U nach a) trivial auf diesen, läßt daher alle Zykel fest und ist folglich trivial.

c) Folgt unmittelbar aus b). ∎

Hilfssatz 1.06: Ist H eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von Δ der Dimension größer 1, dann besitzt H auf höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen Fixpunkte.

Beweis: Nehmen wir an, H besitze 3 verbindbare Fixpunkte p_1, p_2, p_3. Diese definieren einen Zykel z, der unter H festbleibt. Wegen $H \subseteq \Delta$ operiert H sogar trivial auf z, und daher induziert H in A_{p_1} eine mindestens 2-dimensionale Gruppe von Homologien mit Zentrum $\Pi \setminus \{i_{p_1}\}$ und Achse z. Dies steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1.01. ∎

Korollar 1.07: Unter der Voraussetzung von Hilfssatz 1.06 operiert H auf höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen nicht transitiv.

Wir können nun die Dimension von Δ abschätzen.

Hilfssatz 1.08: Die Dimension von Δ ist höchstens 4.

Beweis: Wir nehmen an, Δ habe eine Dimension größer 4 und wählen 3 beliebige, verbindbare Punkte p_1, p_2, p_3. Auf Δ^1 ist die Dimensionsformel (siehe Satz 0.09) anwendbar und ergibt $\dim \Delta^1_{p_1} \geq 4$. Entsprechend erhalten wir also eine mindestens 2-dimensionale, zusammenhängende und abgeschlossene Untergruppe H von Δ, die p_1, p_2 und p_3 festläßt. Dies steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1.06. ∎

1.08 hat die folgende Konsequenz für die Automorphismengruppe einer ebenen Laguerreebene.

Korollar 1.09: Die Dimension von Γ^* ist höchstens 7.

Beweis: Nach Hilfssatz 1.08 ist Δ höchstens 4-dimensional. Die Faktorgruppe Γ^*/Δ operiert effektiv auf $\mathbb{R}$ bzw. S_1 (Δ ist der Ineffektivitätskern der Wirkung von Γ^* auf Π) und kann nach [Satz 0.15 (Brouwer)] höchstens 3-dimensional sein. Damit ist Γ^* höchstens 7-dimensional. ∎

Der Grenzfall $\dim \Delta = 4$ hat für die Laguerreebene weitreichende Konsequenzen und wird deshalb explizit angegeben.

Satz 1.10 (Groh): Für 4-dimensionales Δ ist die Laguerreebene ovoidal.

Den Beweis findet man in [Gr 69; Theorem]. In der zitierten Arbeit von Groh wird auch die Transitivität von Δ auf der Zykelmenge Z bewiesen. Wir geben hierfür einen elementaren Beweis an.

Hilfssatz 1.11: Für 4-dimensionales Δ operiert Δ transitiv auf der Zykelmenge Z.

Beweis: Nach Korollar 1.07 lassen sich drei Unverbindbarkeitsklassen finden, auf denen Δ transitiv operiert. Jeder Zykel z schneidet diese Klassen in drei Punkten p_1, p_2, p_3; es gilt $\dim \Delta_z = \dim \Delta_{p_1,p_2,p_3} = 1$ und damit nach der Dimensionsformel $\dim z^{\Delta} = 3$.
Aus der Homogenität der Bahn z^{Δ} folgt ihre Offenheit. Als zusammenhängender Raum läßt sich $Z \approx \mathbb{R}^3$ nur in eine Bahn unter Δ zerlegen, d.h. Δ operiert transitiv auf der Zykelmenge Z. ∎

Korollar 1.12: Alle Zykel einer ovoidalen Laguerreebene sind Ovale.

Korollar 1.13: Ist Δ 4-dimensional und z ein beliebiger Zykel, dann folgt $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$.

Nach Satz 1.10 ist $(P,Z,\in)$ für 4-dimensionales Δ ovoidal, und nach [M 67; Folgerung 5.2.4] wird Γ^* von einer geeigneten Untergruppe von $PGL_4(\mathbb{R})$ induziert. Insbesondere ist Δ isomorph zu einer Untergruppe von $PGL_4(\mathbb{R})$. Wir wollen diese Untergruppe konkret ausrechnen und eine Matrizengruppe angeben, die Δ induziert.
Wir wählen in $PG(3,\mathbb{R})$ einen Punkt p_0, eine p_0 nichtenthaltende Ebene E_0 und ein Oval 0 dieser Ebene. Hierdurch wird (s. S.6) eine ovoidale topologische Laguerreebene $(P,Z,\in)$ definiert, und es gilt:

Lemma 1.14:

a) Sind p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Punkte aus 0 und sind $\{e_i \mid 0 \le i \le 3\}$ Vektoren des $PG(3,\mathbb{R})$ definierenden Vektorraumes V mit $\langle e_i \rangle = p_i$ $(0 \le i \le 3)$, dann bilden diese eine Basis von V.

b) Die bezüglich dieser Basis definierte Matrizengruppe

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0 \right\} \text{ induziert}$$

in $(P,Z,\in)$ die Gruppe Δ.

Δ_0 wird von den Matrizen

$$M_0 := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^* \right\} \text{ induziert.}$$

$$M_R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ ist eine zu } \mathbb{R}^3 \text{ isomorphe}$$

Gruppe, die eine auf Z scharf transitive Untergruppe von Δ induziert.
Es gilt $M = M_R \cdot M_0$.

Beweis: a) p_0, p_1, p_2, p_3 befinden sich in allgemeiner Lage. Denn p_1, p_2, p_3 sind in allgemeiner Lage bezüglich E_0 (dies folgt aus der Ovaleigenschaft von 0), und p_0 liegt nach Voraussetzung nicht in E_0.

b) Für eine Gruppe H von linearen Abbildungen von V bezeichne $\hat{H}$ die Wirkung von H auf $PG(3,\mathbb{R})$. Δ läßt p_0 fest und wird daher von einer linearen Gruppe W induziert. Δ läßt die Geraden $p_0 \vee p_i$ $(1 \leq i \leq 3)$ fest, und somit besteht W bezüglich der Basis aus a) aus Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & e & 0 & 0 \\ c & 0 & f & 0 \\ d & 0 & 0 & g \end{pmatrix}$. $\hat{M}_0$ läßt p_0 fest, operiert auf E_0 und damit auf 0 trivial, fixiert also alle "Mantellinien" des Kegels durch p_0 und 0 und liegt folglich in Δ_0. Umgekehrt wird jeder Automorphismus aus Δ von einer Matrix g induziert, die sich von einem

Element aus M_0 nur um einen skalaren Faktor unterscheidet. Also gilt $\Delta_0 = \hat{M}_0 \cong M_0$.

Sei z ein von 0 verschiedener Zykel. z schneidet die Mantellinie $p_o \vee p_i$ in $\langle e_i + b_i e_o \rangle$. Die Zahlen b_i bestimmen hier eindeutig den Zykel z. In Hilfssatz 1.11 wurde die Transitivität von Δ auf Z bewiesen. Zu $z \in Z$ existiert also ein δ_z aus Δ mit $0^{\delta_z} = Z$, d.h. δ_z überführt $\langle e_i \rangle$ in $\langle e_i + b_i e_o \rangle$ und läßt $\langle e_o \rangle$ fest. Dann stimmt δ_z mit der durch die Matrix

$$m(b_1,b_2,b_3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ definierten Kollineation

auf den Punkten p_i überein. Es folgt $\delta_z = \hat{m}(b_1,b_2,b_3)$, und $\hat{M}$ liegt in Δ. Sei nun δ ein beliebiges Element aus Δ, das 0 in einen Zykel z überführt. Wegen der Transitivität von $\hat{M}$ auf Z existiert ein $\hat{n}$ mit $z^{\hat{n}} = 0$; d.h. $0^{\delta\hat{n}} = 0$ und $\delta \cdot \hat{n}$ liegt in $\Delta_0 = \hat{M}_0$. Folglich liegt δ in $\hat{M}$, und wir haben $\Delta = \hat{M}$ bewiesen. ∎

Mit I_p wird der Ineffektivitätskern der Wirkung von Δ auf der Unverbindbarkeitsklasse i_p bezeichnet. Wir benötigen später die folgenden zwei Aussagen über 3- bzw. 2-dimensionales Δ.

Hilfssatz 1.15: Für 3-dimensionales Δ kann Δ/I_p keine zu $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ isomorphe Gruppe sein.

Beweis: Nehmen wir an, die Aussage von 1.15 sei für eine Unverbindbarkeitsklasse als richtig nachgewiesen. Dann ist die Gruppe Δ/I_p und I_p auflösbar. Folglich ist auch Δ auflösbar, und die Aussage von 1.15 gilt für alle Unverbindbarkeitsklassen.
Wir zeigen, daß die Aussage von 1.15 für eine Klasse i_{p_o}, auf der Δ nach 1.07 transitiv operiert, richtig ist und

argumentieren durch Widerspruch. Δ/I_{p_o} ist dann einfach, auf $i_{p_o} \approx \mathbb{R}$ transitiv, also zu $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ isomorph. $Z(\Delta/I_{p_o})$ ist nach [S.16] eine zu $\mathbb{Z}$ isomorphe, auf i_{p_o} fixpunktfrei operierende Gruppe. Ω bezeichne die Menge der Orbits von $Z(\Delta/I_{p_o})$ auf i_{p_o}. $\bar{\Delta} := \Delta/I_{p_o}/Z(\Delta/I_{p_o})$ operiert auf Ω in der natürlichen Wirkung von $PSL_2(\mathbb{R})$ auf S_1. Dem Untergruppenverband von $PSL_2(\mathbb{R})$ entnehmen wir, daß eine 2-dimensionale, zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von $\bar{\Delta}$ Standgruppe eines Elementes ω aus Ω ist. Für einen Punkt q aus einer beliebigen Unverbindbarkeitsklasse $i_q \neq i_{p_o}$, auf der Δ transitiv operiert, ist Δ_q 2-dimensional. Δ_q induziert in $\bar{\Delta}$ eine 2-dimensionale, zusammenhängende Gruppe und läßt folglich ein Element ω aus Ω fest. ω ist ein Orbit von $Z(\Delta/I_{p_o})$ in i_{p_o}, also eine diskrete Menge. Folglich läßt Δ_q alle Punkte aus ω fest. In A_q induziert Δ_q eine 2-dimensionale Gruppe von Zentralkollineationen, die auf i_{p_o} Fixpunkte besitzt, aber nicht trivial operiert.

Ein Widerspruch. ∎

Lemma 1.16: Sei Δ mindestens 2-dimensional und Γ mindestens 3-dimensional. Dann können Fixpunkte von Δ allenfalls auf Unverbindbarkeitsklassen liegen, die unter Γ festbleiben.

Beweis: Haben Γ und Δ die gleiche Dimension, dann fällt Δ mit Γ zusammen, da Γ/Δ als Faktorgruppe einer zusammenhängenden Gruppe nach einem abgeschlossenen Normalteiler wieder zusammenhängend ist.

Nehmen wir an, Δ besitze einen Fixpunkt p und Γ bewege i_p. Da Γ/Δ zusammenhängend ist, ist eine Bahn von Γ/Δ auf Π entweder eine Unverbindbarkeitsklasse oder ein "Intervall"

in Π. Insbesondere enthält die Bahn i_p^Γ mindestens 3 Unverbindbarkeitsklassen.
Der Normalteiler Δ ließe auch die Punkte p^γ (für $\gamma \in \Gamma$) fest. Dies steht im Widerspruch zu Hilfssatz 1.06. ∎

Das folgende Lemma liefert ein hinreichendes Kriterium dafür, daß eine ovoidale Laguerreebene klassisch ist.

Lemma 1.17: Sei (P,Z,ϵ) eine ebene Laguerreebene mit mindestens 3-dimensionaler Gruppe Γ von Automorphismen und H eine Untergruppe von Γ_z $(z \in Z)$, die zu SO_2 isomorph ist. Dann gilt:

a) H operiert elementweise fixpunktfrei auf z.

b) Ist die Ebene (P,Z,ϵ) ovoidal, dann ist z ein Kegelschnitt.

Beweis: a) Nach Lemma 1.05c) liegt H nicht in Δ und operiert daher nichttrivial auf z.
Wäre p ein Fixpunkt von H auf z, dann müßte H auf $z \setminus \{i_p\} \approx \mathbb{R}$ und damit auf z trivial operieren. Folglich wirkt H transitiv auf z und H/N (N ist der Ineffektivitätskern der Wirkung von H auf z und damit abgeschlossen) daher zu SO_2 isomorph. Die einzigen Untergruppen von SO_2, für die die zugehörigen Faktorgruppen zu SO_2 isomorph sind, sind die endlichen Untergruppen von SO_2. N mit $|N| < \infty$ liegt in $\Delta \cap H$ und operiert elementweise fixpunktfrei auf $i_p \setminus \{i_p \cap z\}$ für p aus P. Wir wählen nun einen festen Punkt p_o auf z. Nach Voraussetzung gilt $\dim \Gamma_{i_{p_o}} \geq 2$. $\Gamma_{i_{p_o}}$ kann nicht auf allen Unverbindbarkeitsklassen Fixpunkte besitzen. Wir nehmen an, p_o sei so gewählt, daß $\Gamma_{i_{p_o}}$ fixpunktfrei und damit transitiv auf i_{p_o} operiert. Da die nichttrivialen Elemente aus N auf $i_{p_o} \setminus \{p_o\}$ fixpunktfrei operieren, kann

$(\Gamma_{i_{p_0}})_1$ auf i_{p_0} weder $\mathbb{R}$ noch $PSL_2(\mathbb{R})$ induzieren.
Es folgt $(\Gamma_{i_{p_0}})_1 \cong L_2$, und N besteht aus Abbildungen der Form $x \to ax$ (p_0 dient als Nullpunkt). Wegen der Endlichkeit von N folgt nun $N = \langle i \rangle$ mit $i|_{i_{p_0}} : x \to -x$ oder $N = \{id\}$.
Wir nehmen an, $|N| = 2$ und wählen in H ein Element g der Ordnung 3. Für $q \in i_{p_0} \setminus \{p_0\}$ bezeichnen wir mit z_q den durch $\{q, q^g, q^{g^2}\}$ eindeutig bestimmten Fixzykel von g. Für die Menge F aller Fixzykel von g gilt $F = z \cup \{z_q \mid q \in i_{p_0} \setminus \{p_0\}\}$. Da g fixpunktfrei auf z operiert, gilt $z_q \cap z_{q'} = \emptyset$ und $z_q \cap z = \emptyset$. F ist invariant unter H und zu $\mathbb{R}$ homöomorph. Es gilt: Eine zusammenhängende Transformationsgruppe G von $\mathbb{R}$, die einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ festläßt, läßt die Menge $\mathbb{R}_1 := \{r \mid r > a\}$ bzw. $\mathbb{R}_2 := \{r \mid r < a\}$ invariant. Übersetzt in die Zykelmenge F bedeutet dies, daß die "oberhalb" von z liegenden Zykel z_q unter H in ebensolche überführt werden. Dies wird von i verletzt. Es folgt $N = \{id\}$, und damit ist a) bewiesen.

b) Bekanntlich gilt $GL_3(\mathbb{R}) = SL_3(\mathbb{R}) \times \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R}^* \right\}$,
und somit sind $PGL_3(\mathbb{R})$ und $SL_3(\mathbb{R})$ isomorph. Als elementweise fixpunktfreie Gruppe auf z wirkt H effektiv auf z und damit natürlich auch effektiv auf der durch z bestimmten Hyperebene E_z von $PG(3,\mathbb{R})$. Wir fassen H als Kollineationsgruppe von E_z auf und können annehmen, daß H auf E_z so wirkt wie eine zu SO_2 isomorphe Untergruppe $\tilde{H}$ der $SL_3(\mathbb{R})$ auf den 1-dimensionalen Unterräumen des $\mathbb{R}^3$. Es genügt also zu zeigen, daß die Punktbahnen von $\tilde{H}$ Kegelschnitte sind, und dies ist gezeigt, falls $\tilde{H}$ zu einer Gruppe von Drehmatrizen in $SL_3(\mathbb{R})$ konjugiert ist.
Als (abstrakt) zu SO_2 isomorphe Gruppe enthält $\tilde{H}$ ein

Element $\tilde{h}_1$ der Ordnung 3. Ein Eigenwert von $\tilde{h}_1$ ist eine reelle Zahl a mit $a^3 = 1$, und daher besitzt $\tilde{h}_1$ nur den Eigenwert 1. Dieser kann nur die geometrische Vielfachheit 1 besitzen.
e_1 bezeichne einen Fixvektor von $\tilde{h}_1$. Da $\tilde{H}$ abelsch ist, bleibt $\langle e_1 \rangle$ unter ganz $\tilde{H}$ fest. Da $\tilde{H}$ zu SO_2 isomorph ist, kann $\tilde{H}$ auf den Vektoren aus $\langle e_1 \rangle$ nur trivial operieren; d.h. $\langle e_1 \rangle$ ist der Fixpunkt von $\tilde{H}$ in E_z.
Nach dem Satz von Maschke [Hu 67; Satz 17.7] existiert dann zu $\langle e_1 \rangle$ ein $\langle \tilde{h}_1 \rangle$-invariantes Komplement U, d.h. $\mathbb{R}^3 = \langle e_1 \rangle \oplus U$. U ist das einzige $\langle \tilde{h}_1 \rangle$-invariante Komplement von $\langle e_1 \rangle$ und daher invariant unter $\tilde{H}$.
Nach Wahl von Basisvektoren e_2, e_3 in U wird ein $\tilde{h} \in \tilde{H}$ durch eine Matrix der Form $\tilde{h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & A(\tilde{h}) & \end{pmatrix}$ dargestellt.
Die 2×2 Matrizen $A(\tilde{h})$ $(\tilde{h} \in \tilde{H})$ bilden eine zu $\tilde{H}$ (und damit also zu SO_2) isomorphe Untergruppe von $SL_2(\mathbb{R})$.
Bekanntlich [Be 72; S.27] gilt

$$g^{-1}\{A(\tilde{h}) \mid \tilde{h} \in \tilde{H}\}g = \{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R}\} \text{ mit } g \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Mit $\bar{g} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & g & \end{pmatrix}$ folgt dann

$$\bar{g}^{-1}\tilde{H}\bar{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}, \text{ und somit ist } \tilde{H}$$

in $SL_3(\mathbb{R})$ zu einer Gruppe von Drehmatrizen konjugiert.

∎

Die folgenden zwei Sätze beschreiben Zykel z, über deren Stabilisatoren Γ_z gewisse Informationen vorliegen. Wir benötigen zunächst einen Hilfssatz, der unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz einer auf Π scharf transitiven Gruppe sichert.

Lemma 1.18 (Tits): [Ti 62]

a) Eine auf den Punkten der reellen affinen Geraden transitive Kollineationsgruppe G enthält den Translationsnormalteiler von $AG(1,\mathbb{R})$.

b) Eine auf den Geraden $h_a := \{(a,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $(a \in \mathbb{R})$ transitive Gruppe G von Kollineationen der reellen affinen Ebene enthält einen auf $\{h_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ transitiven Normalteiler T mit $h_a^t = h_{a+b(t)}$ für t aus T.

Beweis: a) Wir setzen $g := AG(1,\mathbb{R})$ und nehmen an, die Aussage a) sei falsch. Wegen der Transitivität von G auf g enthält dann G eine Streckung $h : x \to ax+b$ mit $a \neq 1$. Diese Abbildung hat den Fixpunkt $\frac{-b}{a-1}$. Zu c aus $\mathbb{R}$ existiert ein g_c aus G, das $\frac{-b}{a-1}$ in c überführt. Durchläuft c die reellen Zahlen, dann werden durch h^{g_c} alle Streckungen mit Streckungsfaktor a erfaßt. Insbesondere enthält G die Streckung $x \to ax$ und ihr Inverses. Für b aus $\mathbb{R}$ liegt auch $x \to ax+b$ in G und damit auch die Translation $x \to x+b$. $(= (x \to a^{-1}x)\cdot(x \to ax+b))$ Es folgt die Behauptung a).

b) Nach Dualisieren im projektiven Abschluß von $AG(2,\mathbb{R})$ folgt b) aus a). ∎

Prof. Mäurer hat die folgende Charakterisierung von Kegelschnitten bewiesen (unveröffentlicht):
Ist O ein abgeschlossenes Oval in der reellen projektiven Ebene und G eine Gruppe von Kollineationen der Ebene, die O invariant läßt, einen Fixpunkt p auf O besitzt und auf $O \setminus \{p\}$ transitiv operiert, dann ist O ein Kegelschnitt.
Der Beweis dieser Aussage führt nach geeigneten Abänderungen zu dem folgenden Satz über Laguerregeometrien.

Satz 1.19: Für einen Punkt p_o und einen p_o nichtenthaltenden Zykel z einer ebenen topologischen Laguerreebene $(P,Z,\in)$ enthalte $\Gamma_{p_o,z}$ eine Untergruppe G, die auf $z \setminus \{z \cap i_{p_o}\}$ transitiv operiert. Ist A_{p_o} eine reelle affine Ebene, dann ist
a) $z \setminus \{z \cap i_{p_o}\}$ Graph einer Exponentialfunktion, und G ist 1-dimensional

oder

b) $z^{\frown}\{z \cap i_{p_0}\}$ ist ein Kegelschnitt.

Beweis: Wir setzen $z^* := z^{\frown}\{z \cap i_{p_0}\}$ und wählen einen Punkt p_1 auf z^*. Als x-Achse in A_{p_0} verwenden wir den Berührzykel an z durch p_0 in p_1 und als y-Achse die Unverbindbarkeitsklasse i_{p_1}. Die Unverbindbarkeitsklassen werden bezüglich dieser Koordinatisierung durch die Geraden $h_b := \{(b,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ $(b \in \mathbb{R})$ der reellen affinen Ebene dargestellt, und p_1 erhält die Koordinaten $(0,0)$.
z^* schneidet jede Gerade h_b in genau einem Punkt. Durch $f(x) := p_y(z^* \cap h_x)$ (p_y bezeichnet die Orthogonalprojektion auf die y-Achse) wird dann [BHL 80; Satz 2.6] eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erklärt mit $z^* = \text{graph } f = \{(x,f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Schließlich legen wir die Koordinatisierung der Ebene A_{p_0} so fest, daß $(1,1) = (1, f(1))$ gilt. Nach Hilfssatz 1.18b) enthält G einen auf z^* transitiven Normalteiler T, und für jedes a aus $\mathbb{R}$ existiert eine Abbildung g aus T mit $h_b^{g_a} = h_{b+a}$ $(a \in \mathbb{R})$. Es folgt $(0,0)^{g_a} = (h_0 \cap z^*)^{g_a} = h_0^{g_a} \cap z^{*g_a} = h_a \cap z^* = (a\ f(a))$. Der Ineffektivitätskern der Wirkung von T auf z^* ist trivial, und T ist daher eine 1-dimensionale, abelsche Gruppe, die scharf transitiv auf den Geraden h_a operiert.
In A_{p_0} induziert g_a eine Kollineation, die für $a \neq 0$ den Nullpunkt bewegt. Es folgt $g_a = \begin{pmatrix} r(a) & v(a) \\ s(a) & u(a) \end{pmatrix} \cdot \tau_{\alpha,\beta}$ mit einer Translation $\tau_{\alpha,\beta}$. Aus $(0,0)^{g_a} = (a, f(a))$ folgt $\alpha = a$, $\beta = f(a)$, und aus $h_b^{g_a} = h_{b+a}$ folgt $r(a) = 1$ und $s(a) = 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) Es existiert ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $u(a_0) \neq 1$. Dann besitzt die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & v(a_0) \\ 0 & u(a_0) \end{pmatrix}$ die zwei Eigenwerte 1 und $u(a_0)$. Zugehörige Eigenräume sind eine Nullpunktsgerade h und

die y-Achse. Die zu h parallelen Geraden haben alle gleiche Steigung m und werden von $\begin{pmatrix} 1 & v(a_o) \\ 0 & u(a_o) \end{pmatrix}$, $\tau_{a_o,f(a_o)}$ und damit von g_{a_o} permutiert.

Auf der Ferngeraden von A_{p_o} operieren die Abbildungen g_b wie die zugehörigen Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & v(b) \\ 0 & u(b) \end{pmatrix}$. Für diese Matrizen ist der Fernpunkt der y-Achse das Zentrum. Als Zentralkollineationen besitzen die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & v(b) \\ 0 & u(b) \end{pmatrix}$ höchstens einen weiteren Fixpunkt. Da T abelsch ist, lassen alle diese Matrizen den Fernpunkt der Geraden h fest. Folglich permutiert T die zu h parallelen Geraden.

Eine solche Gerade h' schneidet z^* in mindestens einem Punkt. Gilt $h' \cap z^* = \{p_2, p_3\}$, dann existiert ein g_b mit $p_2^{g_b} = p_3$. Dann läßt aber g_b die Gerade h' fest und vertauscht die Punkte p_2 und p_3. Die Abbildung g_b^2 aus T läßt dann die Parallelen zur y-Achse durch p_2 bzw. p_3 fest und ist daher die identische Abbildung. Da es in T keine Involutionen gibt, ist die Annahme $|h' \cap z^*| = 2$ nicht haltbar. Es folgt $h' \cap z^* = p_2$, d.h. h' ist Berührzykel durch p_o in p_2. Aufgrund der transitiven Wirkung von T auf z^* erhalten wir dann durch $(h')^{g_b}$ $(b \in \mathbb{R})$ alle Berührzykel an z durch p_o. Diese haben alle gleiche Steigung m. Den Berührzykel an z durch p_o in p_1 haben wir bereits als x-Achse festgelegt. Folglich sind die Berührzykel an z durch p_o Parallelen zur x-Achse, wir erhalten $m = 0$ und dann $v(b) = 0$ für $b \in \mathbb{R}$.

Wir berechnen:

$$(0,0)^{g_a g_b} = (0,0)^{g_b g_a} = (0,0)^{g_{a+b}} \quad \text{oder}$$

$$(*) \quad f(a) \cdot u(b) + f(b) = f(a+b) = f(b) \cdot u(a) + f(a) \quad \text{oder}$$

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{u(a)-1}{u(b)-1} .$$

Mit $f(1) = 1$ folgt

(**) $f(a) = c\cdot(u(a)-1)$ mit $c = \frac{1}{u(1)-1}$

(Unter den Voraussetzungen von a) gilt $v(b) \neq 1$ für $b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$).

Einsetzen von (**) in (*) ergibt:

(***) $u(a+b) = u(a)\cdot u(b)$.

Mit f ist auch u stetig, und als Lösung der Funktionalgleichung (***) folgt $u(a) = u(1)^a$ und damit $f(a) = c\cdot(u(1)^a-1)$. Asymptote dieser Kurve ist die Gerade $y = -c$. Diese bleibt unter T invariant, und T operiert durch $(x,-c)^{g_a} = (x+a, -c)$ auf dieser Geraden.
$y = -c$ ist die einzige Gerade in A_{p_o}, die unter einer Abbildung g_a festbleibt.
Falls G den Normalteiler T echt umfaßt, existiert ein g aus $G\setminus T$, das $(0,0)$ festläßt. g operiert also linear auf A_{p_o} und läßt die y-Achse und die x-Achse invariant.
Da g die Gruppe T normalisiert, läßt g auch die Asymptote an z^* fest und hat folglich die Form $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Die Bilder des Punktes $(1,1)$ aus z^* unter $<\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}>$ sind aber kollinear, ein Widerspruch. Es folgt $G = T$.

b) Wir dürfen nun $u(a) = 1$ für a aus $\mathbb{R}$ voraussetzen.

Aus $(0,0)^{g_a g_b} = (0,0)^{g_{a+b}}$ folgt

$f(a+b) = v(a)\cdot b + f(b) + f(a) = v(b)\cdot a + f(a) + f(b)$ und

damit $v(a) = a\cdot v(1)$ bzw. $f(a+b) = a\cdot b\cdot v(1) + f(a) + f(b)$.

Mit $d(x) := f(x) - \frac{v(1)}{2} x^2$ berechnen wir

$d(x+y) = d(x) + d(y)$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Stetigkeit von d, und als Lösung der Funktionalgleichung für d erhalten wir:
$d(x) = x\cdot d(1) = x\cdot(1 - \frac{v(1)}{2})$ und damit

$f(x) = \frac{v(1)}{2} x^2 + (1 - \frac{v(1)}{2})x$. Folglich ist z^* ein Kegelschnitt. ∎

Ein ähnliches Resultat liefert das nächste Lemma.

Lemma 1.20: In einer topologischen Laguerreebene $(P,Z,\in)$ sei für einen Punkt p_0 die Ableitung A_{p_0} desarguessch. Ist p_1 ein mit p_0 verbindbarer Punkt, z ein p_0 nichtenthaltender Zykel, H eine 1-dimensionale, abgeschlossene Untergruppe von Γ_{z,p_0,p_1}, dann hat $z\setminus\{z \cap i_{p_0}\}$ bei geeigneter Koordinatisierung von A_{p_0} die Form

$$z\setminus\{z \cap i_{p_0}\} = \{(d,d^k) \mid d \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(-d,bd^k) \mid d \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(0,0)\}$$

mit $k > 1$ und $b > 0$.
Die Punktmenge $z\setminus\{z \cap i_{p_0}\}$ ist der affine Anteil eines Ovals. $(0,0)$ beschreibt hierbei den Punkt p_1. p_1 liegt also auf z und ist der einzige Fixpunkt von H auf $z\setminus\{z \cap i_{p_0}\} =: z_{aff}$.

Beweis: Da H den nicht auf z liegenden Punkt p_0 festläßt, operiert H effektiv auf $z\setminus\{z \cap i_{p_0}\}$. In A_{p_0} induziert H eine Gruppe von Kollineationen. Wir wählen als x-Achse von A_{p_0} einen Zykel durch p_0 und p_1 und als y-Achse die Unverbindbarkeitsklasse i_{p_1}. p_1 ist dann Nullpunkt des Koordinatensystems, und dieses kann noch so gewählt werden, daß ein beliebiger nicht auf den Achsen liegender Punkt die Koordinaten $(1,1)$ erhält.
Wir benutzen mehrfach: (*) $|z \cap g| < 3$ für alle Geraden g aus A_{p_0}. Denn Unverbindbarkeitsklassen schneiden z in genau einem Punkt, und von z verschiedene Zykel treffen z in höchstens 2 Punkten.

H induziert auf A_{p_0} eine 1-dimensionale, abgeschlossene Untergruppe der linearen Gruppe; da H die y-Achse i_{p_1}

festläßt, induziert H sogar eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen auf A_{p_o}. Die Möglichkeiten für solche Gruppen sind in [Be 72; S.7] angegeben. Wir lassen H diese Liste durchlaufen und prüfen, welche Gruppen mit der Geometrie der Laguerreebene verträglich sind.

C bezeichne ein nichttriviales, in z enthaltenes Punktorbit von H. Wir legen das Koordinatensystem zunächst so fest, daß C den Punkt $(1,1)$ enthält.

H hat die Form G^f mit $f \in GL_2(\mathbb{R})$ und G eine Gruppe der Liste. Da H aus oberen Dreiecksmatrizen besteht, können wir im folgenden (außer in c) f als obere Dreiecksmatrix voraussetzen.

Wenn wir die gewählte Basis durch ihr f-Bild ersetzen (y-Achse geht in sich über), dann wird H bezüglich dieser Basis durch die Matrizen aus G beschrieben, und $(1,1)$ erhält die Koordinaten $(a,b) := (1,1)^f$.

a) $H \neq G$ mit $G = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a > 0\}$ oder $G = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Denn die Orbits der angegebenen Gruppen sind Halbgeraden, und daher kann z_{aff} wegen (*) nicht G-invariant sein.

b) $H \neq G$ mit $G = \{\begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Denn andernfalls enthält z_{aff} die Menge

$(a,b)^G = \{(ae^t, (at+b)e^t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, und

$(0,0) = \lim_{t \to -\infty} (ae^t, (at+b)e^t)$ liegt in $\bar{z}_{aff}$.

z_{aff} ist abgeschlossene Teilmenge von A_{p_o}, d.h. $(0,0) \in z^f_{aff}$.

Jede Gerade der Form $y = cx$ (d.h. ein Zykel) trifft $(a,b)^G$ (und damit z_{aff}) in einem Punkt $(a \cdot e^{c-\frac{b}{a}}, a \cdot c\, e^{c-\frac{b}{a}})$. Nach dem Berühraxiom für Laguerreebenen existiert genau ein Zykel z' durch p_o und $(0,0)$, der z in $(0,0)$ berührt. z' wird in A_{p_o} durch eine Gerade der Form $y = cx$ beschrieben und schneidet damit z auch noch in $(a \cdot e^{c-\frac{b}{a}}, a \cdot c\, e^{c-\frac{b}{a}})$, ein Widerspruch.

c) $H \neq G$ mit $G = \{e^{st}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

H induziert eine Gruppe von oberen Dreiecksmatrizen auf A_{p_o}. Die angegebene Gruppe G ist aber irreduzibel und kommt daher nicht in Frage.

d) Falls $H = G$ mit $G = \{\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \mid d \in \mathbb{R}^+\}$, dann gilt $k > 1$.

Wir nehmen zunächst $k < 0$ an.
Dann ist $(a,b)^H$ ein Hyperbelast, dessen eine Asymptote die x-Achse ist. Aus Stetigkeitsgründen schneiden sich dann z und die x-Achse in p_o, im Widerspruch zur Definition von z.
$k = 1$ ist bereits in a) abgehandelt worden.
Für $k = 0$ ist $(a,b)^G$ ein Geradenstück.
$(0,0)$ liegt im Abschluß von $(a,b)^G = \{(ad,bd^k) \mid d > 0\} =$
$= \{(x, \frac{b}{|a|^k}|x|^k) \mid x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}^+\}$

($a \neq 0$, da sonst $(0,b)^G$ = y-Achse, aber $(0,b)^G$ ist enthalten in einem Zykel).
Somit liegt $(0,0)$ in z_{aff}. Da z_{aff} jede von i_{p_o} verschiedene Unverbindbarkeitsklasse (d.h. die Parallelen zur y-Achse) genau einmal trifft, folgt:
$z_{aff} = \{(0,0)\} \cup (a,b)^G \cup (a',b')^G$, und wir dürfen $a = 1$, $a' = -1$ annehmen.
Aus elementaren Grenzwertsätzen folgt, daß für $0 < k < 1$ der Graph der Funktion h mit $h(x) = bx^k$ die Gerade $y = cx$ (wobei $c \neq 0$ gleiches Vorzeichen wie b hat) in $(0,0)$ und genau einem weiteren Punkt schneidet.
Folglich haben b und b' gleiches Vorzeichen, und ohne Einschränkung kann b als positiv angenommen werden. Eine Gerade, die $(1,b)^G$ in zwei von $(0,0)$ verschiedenen Punkten schneidet, trifft $(-1,b')^G$ in einem weiteren Punkt, ein Widerspruch.
Also gilt $k > 1$.

Hätten b und b' verschiedenes Vorzeichen, dann gäbe es Geraden, die z_{aff} in 3 Punkten schneiden, ein Widerspruch.
Also haben b und b' gleiches ohne Einschränkung positives Vorzeichen, und es gilt
$z_{aff} = \{(0,0)\} \cup \{(d,bd^k) \mid d \in \mathbb{R}^+\} \cup \{(-d,b'd^k) \mid d \in \mathbb{R}^+\}$.
Die Funktion 0 mit $0(d) = \begin{cases} bd^k & \text{für } d > 0 \\ b'|d|^k & \text{für } d < 0 \end{cases}$ ist differenzierbar, und $0'$ ist eine streng monoton wachsende Bijektion.
Nach einem Resultat von Hartmann [Ha 84; Satz 1] ist dann der Graph $0 = z_{aff}$ der affine Teil eines Ovals.
b dürfen wir nach einer letzten Umkoordinatisierung als 1 nehmen. ∎

Aus scharf transitiven Untergruppen von Δ läßt sich in manchen Fällen ganz Δ rekonstruieren. Es gilt:

Satz 1.21: Sind $(P_i,Z_i,\in)$ $(i \in \{1,2\})$ zwei ebene Laguerreebenen, für die $\Delta^{(i)}$ auf Z_i scharf transitive abelsche Untergruppen U_i mit $U_1 \cong U_2$ enthalte. Dann sind auch die Normalisatoren $N_{\Delta^{(i)}}(U_i)$ isomorph.

Beweis: Die Aussage von Satz 1.21 gilt nicht, wenn man $\Delta^{(i)}$ durch $\Gamma^{(i)}$ ersetzt. In ovoidalen Ebenen enthält nämlich die 4-dimensionale Gruppe $\Delta^{(i)}$ einen 3-dimensionalen, auf Z scharf transitiven Normalteiler N, der normal in der vollen Automorphismengruppe ist. Es gilt also $N_\Gamma(N) = \Gamma$. Für klassische bzw. nichtklassische ovoidale Ebenen besitzt die Automorphismengruppe aber verschiedene Dimension.
Der Beweis beruht auf der folgenden Tatsache:

(*) Ist H eine Permutationsgruppe auf der Menge M, und ist N ein scharf transitiver Normalteiler von H, dann gilt $H = N \cdot H_m$ $(m \in M)$, und die Wirkung von H_m auf $M \setminus \{m\}$ ist permutationsäquivalent zur Konjugationswirkung von H_m

auf $N\setminus\{id\}$. Die Äquivalenz wird durch die Abbildung $n \to m^n$ gegeben.
Ist umgekehrt ein semidirektes Produkt $H = N \cdot K$ gegeben, dessen Normalteiler N scharf transitiv auf einer Menge M operiert, dann läßt sich eine Wirkung von K auf M (und damit von H auf M) durch $m^k = m$ für ein festes $m \in M$ und $(m^n)^k := m^{(k^{-1}nk)}$ erklären.

Ist H eine topologische Gruppe und N eine Transformationsgruppe, dann läßt sich entsprechend H zu einer Transformationsgruppe machen.
Für den Beweis des Satzes genügt es aus Symmetriegründen eine Injektion von $N_{\Delta^{(1)}}(U_1)$ in $N_{\Delta^{(2)}}(U_2)$ anzugeben.

Da U_1 auf Z_1 scharf transitiv operiert, und U_1 Normalteiler ihres Normalisators $N_{\Delta^{(1)}}(U_1)$ ist, gilt $N_{\Delta^{(1)}}(U_1) = U_1 \cdot K_1$ mit $K_1 \subseteq \Delta^{(1)}_{z_1}$ für $z_1 \in Z_1$. Der Isomorphismus φ zwischen U_1 und U_2 induziert einen Isomorphismus ψ zwischen $\mathrm{Aut}\, U_1$ und $\mathrm{Aut}\, U_2$. Da $U_1 \cdot K_1$ semidirektes Produkt ist, können wir K_1 als Untergruppe von $\mathrm{Aut}\, U_1$ auffassen. Wir setzen $K_2 := K_1\psi$ und erhalten ein semidirektes Produkt $U_2 \cdot K_2$.
Nach (*) wird durch $z_2^k = z_2$ und $z^k = (z_2^u)^k := z_2^{(k^{-1}uk)}$ (z_2 ein fester Zykel aus Z_2) die Gruppe $U_2 \cdot K_2$ zu einer Transformationsgruppe auf Z_2 gemacht. Wir definieren eine Wirkung von K_2 auf dem Punktraum P_2 und zeigen, daß durch die angegebenen Wirkungen von K_2 auf P_2 und Z_2 die Gruppe K_2 zu einer Untergruppe von Δ_{z_2} isomorph ist:

Sei $s \in P_2$ und $s_2 := i_s \cap z_2$. Da U_2 transitiv auf Z_2 operiert, existiert mindestens ein $u \in U_2$ mit $s_2^u = s$. Ist $\tilde{u} \in U_2$ ein von u verschiedenes Element mit $s_2^{\tilde{u}} = s$, dann folgt $s_2^{u\tilde{u}^{-1}} = s_2$. Da U_2 transitiv auf Z_2 operiert, induziert U_2 eine transitive Gruppe auf i_s, und da U_2 abelsch ist, fallen der Ineffektivitätskern von U_2 auf i_s und $(U_2)_{s_2}$ zusammen.
Es folgt $\tilde{u} = \delta \cdot u$ mit $\delta \in U_2$, und δ operiert trivial auf i_{s_2}.

Folglich induziert $k^{-1}\delta k$ auf i_s die identische Abbildung.

Wir definieren nun $s^k := s_2^{(k^{-1}uk)}$ und zeigen die Unabhängigkeit der Definition von der speziellen Wahl von u.

$s_2^{(k^{-1}\tilde{u}k)} = s_2^{(k^{-1}\delta k)(k^{-1}uk)} = s_2^{(k^{-1}uk)} = s^k$.

Da $k^{-1}uk$ ein Laguerreautomorphismus ist, gilt für $s \in z$ $s^k \in z^k$, und folglich ist k ein Automorphismus der Ebene (P_2, Z_2), und der Satz ist bewiesen. ∎

Bemerkung 1.22: Aus dem Beweis von Satz 1.21 geht hervor, daß die Aussage des Satzes für allgemeine Laguerreebenen Gültigkeit hat.

Korollar 1.23: Ist $(P,Z,\in)$ eine ebene Laguerreebene, und enthält Δ eine Untergruppe U mit $U \cong \mathbb{R}^3$, dann ist Δ 4-dimensional.

Beweis: Als abelsche Gruppe operiert U auf einem nichttrivialen Orbit in Z scharf transitiv. U kann keinen Zykel z festlassen, da sonst U trivial auf z operierte und in der Ableitung nach einem Punkt p auf z eine 3-dimensionale Gruppe von Homologien mit Achse $z\setminus\{p\}$ und Zentrum $\Pi\setminus\{i_p\}$ induzieren würde. Folglich operiert U scharf transitiv auf Z.
Wir wählen für $(P_1,Z_1,\in)$ die klassische Ebene.

Hier existiert in $\Delta^{(1)}$ ein auf Z_1 scharf transitiver Normalteiler U_1 mit $U_1 \cong \mathbb{R}^3$. Mit $P_2 := P$, $Z_2 := Z$, $U_2 := U$ folgt aus dem eben bewiesenen Satz $\dim N_{\Delta^{(2)}}(U_2) \geq 4$ und damit die Behauptung. Die Laguerreebene ist also ovoidal. ∎

KAPITEL 2: Ebene Laguerreebenen mit einer 7-dimensionalen Gruppe von Automorphismen

Die klassische Ebene ist durch die Dimension ihrer Automorphismengruppe gekennzeichnet.

Satz 2.01: Eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einer 7-dimensionalen Gruppe Γ von Automorphismen ist klassisch.

Beweis: Wegen $\dim \Delta \leq 4$ nach Hilfssatz 1.08 und der effektiven Wirkung von Γ/Δ auf Π folgt nach dem Satz von Brouwer $\dim \Delta = 4$, und die volle Automorphismengruppe einer ebenen Laguerreebene ist höchstens 7-dimensional. Weiterhin ist Γ/Δ zu einer der im Satz von Brouwer angegebenen einfachen Gruppen isomorph. Nach Satz 1.10 ist $(P,Z,\in)$ ovoidal, und daher läßt sich $(P,Z,\in)$ in den reellen, 3-dimensionalen projektiven Raum einbetten. Der Zykelraum Z ist nach [Gr 69; Satz 3.8 (5b)] homöomorph zum $\mathbb{R}^3$.

Sei z ein Zykel und Γ_z die Standgruppe von z in Γ. Anwendung der Dimensionsformel liefert $\dim \Gamma = \dim \Gamma_z + \dim z^\Gamma$. Da Γ die Dimension 7 hat und die Bahn z^Γ höchstens 3-dimensional ist, hat Γ_z wenigstens die Dimension 4. Die Dimension von Δ_z ist nach Hilfssatz 1.06 höchstens 1. Der Ineffektivitätskern von Γ_z auf z ist Δ_z. Somit operiert Γ_z/Δ_z effektiv auf z, und der Satz von Brouwer liefert $\dim \Gamma_z/\Delta_z = 3$, $\dim \Gamma_z = 4$, $\dim \Delta_z = 1$, und Γ_z/Δ_z ist eine einfache Gruppe.

Wir zeigen $\Gamma_z/\Delta_z \cong PSL_2(\mathbb{R})$. Dann operiert Γ_z/Δ_z fixpunktfrei auf z. Folglich induziert Γ_z/Δ_z die natürliche Wirkung von $PSL_2(\mathbb{R})$ auf z. Diese Wirkung ist 2-fach transitiv. Da die Laguerreebene $(P,Z,\in)$ ovoidal ist, ist z ein Oval (Korollar 1.12). Satz 1.19b) impliziert nun, daß z ein Kegelschnitt ist. Folglich ist die Laguerreebene $(P,Z,\in)$ klassisch. Es bleibt zu

zeigen: $\Gamma_z/\Delta_z \cong PSL_2(\mathbb{R})$.

Γ läßt höchstens eine Unverbindbarkeitsklasse fest, denn blieben i_p und i_q fest unter Γ, dann ist $(\Gamma_p)_q$ mindestens 5-dimensional. Im ovoidalen Fall sind alle Ableitungen desarguessch, und die Standgruppe eines Punktes in der vollen Kollineationsgruppe der Ableitung A_p ist 4-dimensional. Folglich kann $(\Gamma_p)_q$ nicht 5-dimensional sein. (Bemerkung 0.14)
Nach Korollar 1.13 gilt $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$, und Γ_z kann folglich auf z höchstens einen Fixpunkt besitzen. Nehmen wir an $\Gamma_z/\Delta_z \not\cong PSL_2(\mathbb{R})$. Dann ist Γ_z/Δ_z eine einfache Gruppe mit nichttrivialem Zentrum.
Sei $t \in \Gamma_z \setminus \Delta_z$ so gewählt, daß $t \cdot \Delta_z$ im Zentrum von Γ_z/Δ_z liegt. Aus Dimensionsgründen können wir sicher ein g aus $\Gamma \setminus \Delta$ finden, das zwei Punkte $a \neq b \in z$ festläßt; (a bzw. b liegen ohne Einschränkung nicht auf einer Unverbindbarkeitsklasse, die unter Γ festbleibt).
Wegen $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$ folgt $g = g_o \cdot \delta_o$ mit $id \neq g_o \in \Gamma_z$, $\delta_o \in \Delta$. Die Kette $a = a^g = a^{g_o \cdot \delta_o}$ impliziert $a^{g_o} = a$. Da t in Γ_z/Δ_z ein zentrales Element induziert, besitzt t höchstens einen Fixpunkt auf z. Dieser ist aber sicher verschieden von a und b.

$$a^{tg} = a^{tg_o \cdot \delta_o} = a^{g_o \cdot t \cdot \delta_1 \cdot \delta_o} = a^{t\delta_1\delta_o} \quad \text{mit } \delta_1 \in \Delta_z$$

$$a^{tg_o} = a^{t\delta_1} \quad \text{impliziert} \quad a^{tg_o} = a^t.$$

Folglich besitzt g_o die Fixpunkte a und a^t und analog b und b^t. (Es kann sichergestellt werden, daß a^t und b verschieden sind.)
Somit hat g_o vier Fixpunkte auf z. Da die Ebene ovoidal ist, wird g_o von einer Kollineation κ_o einer Hyperebene H induziert mit $H \cap P = z$. Nur die Identität besitzt aber 4 nicht kollineare Fixpunkte auf H; d.h. Γ_z/Δ_z ist zu $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorph.

∎

KAPITEL 3: Ebene Laguerreebenen mit einer 6-dimensionalen Gruppe von Automorphismen

Aus Dimensionsgründen und aus dem Satz von Brouwer (Satz 0.16c)) folgt, daß Δ mindestens 3-dimensional ist. Wir zeigen zunächst:

Satz 3.01: Eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einer 6-dimensionalen Gruppe Γ von Automorphismen und 4-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π ist klassisch.

Beweis: Nach Satz 1.10 ist die Ebene $(P,Z,\in)$ ovoidal, der Zykelraum 3-dimensional und aus Korollar 1.12 folgt $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$. Da die Ebene ovoidal ist, ist der beliebig ausgewählte Zykel z_o ein Oval (Korollar 1.12). Nach der Dimensionsformel $\dim \Gamma = \dim \Gamma_{z_o} + \dim z_o^{\Gamma}$ hat Γ_{z_o} die Dimension 3. Aus Dimensionsgründen gilt $\dim \Delta_{z_o} = \dim \Gamma_{z_o} \cap \Delta = 1$; d.h. Γ_{z_o} induziert auf z_o die 2-dimensionale Gruppe $\Gamma_{z_o}/\Delta_{z_o}$.

Wie im Beweis von Satz 2.01 kann Γ höchstens einen Fixpunkt auf Π besitzen. Denn läßt Γ die Unverbindbarkeitsklassen i_p und i_q fest, dann induziert $(\Gamma_p)_q$ eine mindestens 4-dimensionale Kollineationsgruppe in A_p. A_p ist desarguessch. Die von der 4-dimensionalen Gruppe $(\Gamma_p)_q$ induzierte Gruppe ist enthalten in der Gruppe von Kollineationen von A_p, die q festlassen und das Geradenbüschel $\Pi \setminus \{i_p\}$ permutieren. Diese Gruppe ist aber 3-dimensional (Bemerkung 0.14). Da $L_2 \cong \Gamma/\Delta \cong \Gamma_{z_o}/\Delta_{z_o}$, läßt Γ genau eine Unverbindbarkeitsklasse i_{p_o} fest. Dann operiert auch $\Gamma_{z_o}/\Delta_{z_o}$ auf $z_o \setminus \{z_o \cap i_{p_o}\}$ transitiv. Die Voraussetzungen des Satzes 1.19b) sind erfüllt, somit ist z_o ein Kegelschnitt und die Ebene klassisch. ∎

Es bleibt der Fall $\dim \Delta = 3$ und $\Gamma/\Delta \cong PSL_2^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ zu diskutieren. Nach Hilfssatz 1.15 ist Δ/I_p keine zu

$PSL_2^{(r)}(\mathbb{R})$ $(r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ isomorphe Gruppe, also ist Δ auflösbar. Gemäß Korollar 1.07 können wir annehmen, daß Δ auf i_p transitiv operiert. Dies gilt dann auch für das Δ umfassende Radikal $\tilde{\Delta}$ von Γ. Aus dem Satz von Levi [Ho 63; Teil II, S.40] folgt $\Gamma = \tilde{\Delta} \cdot C$ mit einer halbeinfachen, 3-dimensionalen, abgeschlossenen Gruppe C. Existiert in Δ ein abgeschlossener 2-dimensionaler Γ-invarianter Normalteiler Δ_2, dann ist $\Delta_2 \cdot C$ eine 5-dimensionale Gruppe, die wie in Kapitel 4 gezeigt wird, nicht auf einer ebenen Laguerreebene operieren kann. Insbesondere kann die Kommutatorgruppe Δ' (bzw. ihr Abschluß) nicht 2-dimensional sein. Wir nehmen an $\Delta/I_p \cong L_2$.

Dann ist also Δ' eine 1-dimensionale Gruppe und Normalteiler in Γ, d.h. $\Gamma/\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta') \subseteq \mathrm{Aut}\,\Delta' \cong \mathbb{R}$. Der Δ' umfassende Normalteiler $\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta')$ von Γ ist also mindestens 5-dimensional. Aus der Einfachheit von Γ/Δ folgt dann $\Gamma = \mathfrak{C}_\Gamma(\Delta')$, und somit liegt Δ' in $Z(\Gamma)$ (ohne Einschränkung können wir Δ' als zusammenhängend voraussetzen). Δ' besitzt Fixpunkte auf höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen. Denn drei verbindbare Fixpunkte von Δ' implizieren die Existenz eines Fixzykels z von Δ'. Wegen $\Delta' \lhd \Delta$ ist dieser dann auch Δ-invariant, ein Widerspruch. Folglich operiert Δ' scharf transitiv auf fast allen Unverbindbarkeitsklassen.
Sei i_p eine solche Klasse für die Γ_{i_p} 5-dimensional ist. Es folgt $\dim \Gamma_p = 4$, und wegen $\Gamma_p = \Gamma_p^\delta = \Gamma_{p^\delta}$ für δ aus $\Delta' \subseteq Z(\Gamma)$ operiert Γ_p trivial auf i_p.
Wegen $\Delta' \cap \Gamma_p = \{id\}$ ist $\Delta \cdot \Gamma_p$ 5-dimensional, und $\Delta \cap \Gamma_p$ ist 2-dimensional. Aber $\Delta \cap \Gamma_p = I_p$ ist als 1-dimensionale Gruppe vorausgesetzt, ein Widerspruch.
Folglich gilt $\Delta/I_p \cong \mathbb{R}$, und I_p enthält daher Δ'.

Wegen $\dim \Delta' \neq 2$ ist Δ' also höchstens 1-dimensional. Wir nehmen an, $\Delta' \neq \{id\}$. Dann operiert C durch Konjugation trivial auf Δ'. Wegen $\Delta' \subseteq I_p$ operiert Δ' elementweise trivial auf den Punkten aus i_p. Da wir i_p als nicht invariant unter C voraussetzen dürfen, operiert dann ein δ aus Δ' auf allen Bildern von i_p unter C trivial, was $\delta = id$ impliziert. Damit gilt $\Delta' = \{id\}$, und Δ ist abelsch.

Nach 1.05c) kann Δ keine von der Identität verschiedene kompakte Untergruppe enthalten und ist daher nach [Mo 55; Th. 1, S.104] zum $\mathbb{R}^3$ isomorph.
Wir haben also bewiesen:

Satz 3.02: Für eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einer 6-dimensionalen Gruppe Γ von Automorphismen und 3-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π gilt $\Delta \cong \mathbb{R}^3$.

Satz 3.03: Ist Γ eine abgeschlossene, zusammenhängende 6-dimensionale Gruppe von Automorphismen der ebenen Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit 3-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π, dann ist die Ebene klassisch.

Beweis: Nach Satz 3.02 wissen wir, daß Δ zu der 3-dimensionalen abelschen Gruppe $\mathbb{R}^3$ isomorph ist. Es genügt nachzuweisen, daß Δ scharf transitiv auf Z operiert. Dann ist Korollar 1.23 anwendbar und zeigt, daß der Ineffektivitätskern der vollen Automorphismengruppe von $(P,Z,\in)$ 4-dimensional ist. Folglich hat die volle Automorphismengruppe von $(P,Z,\in)$ die Dimension 7, und die Ebene ist klassisch.
Bekanntlich [Po 57; Bsp. 33, S.127] sind die abgeschlossenen, zusammenhängenden, 2-dimensionalen Untergruppen des $\mathbb{R}^3$ Vektorräume. Für p aus P folgt $\Delta = (\Delta \cap I_p) \oplus C$ mit einer auf i_p scharf transitiven Untergruppe C von Δ. Für C können wir eine Gruppe der Form $\Delta \cap I_{p'} \cap I_{p''}$ für geeignete p', p'' aus P wählen und setzen $C = C(p',p'')$. Wir zeigen nun, daß wir jeden Zykel z in den Zykel durch p,p',p'' überführen können. Der Zykel z schneide i_p, $i_{p'}$, $i_{p''}$ in den Punkten q,q',q''. Es existiert ein c_1 aus $C(p',p'')$, so daß z^{c_1} ein Zykel durch p,q',q'' ist. Entsprechend existiert ein c_2 aus $C(p,p')$, so daß $z^{c_1c_2}$ ein Zykel durch p,q',p'' ist. Schließlich führt ein geeignetes c_3 aus $C(p,p'')$ den Zykel $z^{c_1c_2}$ in den Zykel durch p,p',p'' über. Damit haben wir die Transitivität von Δ auf Z nachgewiesen. Als abelsche Gruppe operiert Δ sogar scharf transitiv auf Z. ∎

Bemerkung 3.04: Die in Satz 3.03 untersuchte Situation läßt sich realisieren.

Sei Γ die Automorphismengruppe der klassischen Ebene, Δ ihr Ineffektivitätskern auf Π und Δ der in Lemma 1.14d) beschriebene auf Z scharf transitive Normalteiler von Γ.

Wir betrachten $\Gamma/\Delta \cong PSL_2^{(1)}(\mathbb{R})$. Nach Levi gilt $\Gamma/\Delta_o = \Delta/\Delta_o \cdot T/\Delta_o$ mit dem Radikal Δ/Δ_o und einer Δ_o umfassenden Gruppe T für die die Voraussetzungen von Satz 3.03 zutreffen.

KAPITEL 4: Ebene Laguerreebenen mit einer 5-dimensionalen Gruppe von Automorphismen

Für 4-dimensionales Δ wirkt Γ/Δ entweder transitiv in der natürlichen Wirkung von SO_2 auf Π, oder Γ/Δ induziert auf jedem nichttrivialen Orbit in Π eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe.

Satz 4.01: Eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einer 5-dimensionalen Gruppe Γ von Automorphismen, 4-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π und $\Gamma/\Delta \cong SO_2$ ist klassisch.

Beweis: Aus $\Gamma/\Delta \cong SO_2$ folgt, daß Γ/Δ scharf transitiv auf Π operiert. Nach Lemma 1.16 operiert Δ transitiv auf den Unverbindbarkeitsklassen und nach Lemma 1.14b) enthält Δ einen auf Z scharf transitiven Normalteiler U. Nach einem Satz von Iwasawa [Iw 49; Lemma 3.4] existiert zu Δ ein zu SO_2 isomorphes Komplement T. Dann operiert $W = U \cdot T$ transitiv auf Z, und da U scharf transitiv auf Z wirkt, gilt $W = U \cdot W_z$ mit $W_z \cong T \cong SO_2$.
Es gilt $W_z \cap \Delta = \{id\}$, und somit operiert $W_z \cong \Gamma/\Delta$ scharf transitiv auf Π; d.h. W_z wirkt scharf transitiv auf z. Nach Lemma 1.17b) ist die Ebene $(P,Z,\in)$ klassisch. ∎

Bemerkung 4.02: Die klassische Ebene besitzt 5-dimensionale Gruppen von Automorphismen, die in der in Satz 4.01 beschriebenen Art und Weise operieren.

Beweis: Es bezeichne Γ die 1-Zusammenhangskomponente der Gruppe der stetigen Automorphismen der klassischen Laguerreebene und Δ ihren Ineffektivitätskern auf Π. Nach den Resultaten von Kapitel 2 gilt: $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$ und $\bar{\Gamma}_z := \Gamma_z/\Delta_z$ ist zur $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorph. $\bar{\Gamma}_z$ enthält eine zu SO_2 isomorphe Untergruppe $\bar{U}$ [Be 72; S.38]. Nach einem Satz von Iwasawa [Iw 49; Lemma 3.4] läßt sich U als $U_o \cdot \Delta_z$ mit $U_o \cong SO_2$ zerlegen. Die Gruppe $U_o \cdot \Delta$ genügt nun den Voraussetzungen des Satzes. ∎

Nichtklassische ovoidale Laguerreebenen erhalten wir für die zweite der oben angegebenen Alternativen.

Satz 4.03: a) Ist $(P,Z,\in)$ eine ebene Laguerreebene mit einer 5-dimensionalen Gruppe Γ von Automorphismen, 4-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π, und wirkt Γ/Δ auf einem Orbit von Π wie $\mathbb{R}$, dann besitzt Γ_z auf einem Zykel z einen oder zwei Fixpunkte.

b) Besitzt Γ_z genau einen Fixpunkt p auf z, dann ist z ein Kegelschnitt und die Ebene klassisch.

c) Besitzt Γ_z genau zwei Fixpunkte p_1, p_2 auf z, dann gilt nach geeigneter Koordinatisierung:

$$z \setminus \{p_1,p_2\} = \{(d,d^k) \mid d > 0\} \cup \{(-d, cd^k) \mid d > 0\} .$$

Hierbei sind k, c reelle Zahlen mit $k > 1$, $c > 0$.

d) z ist ein Oval.

Beweis: a) Da die Ebene ovoidal ist, erhalten wir $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_z$ mit $\dim \Gamma_z = 2$. Γ/Δ läßt mindestens eine Unverbindbarkeitsklasse fest, und deren Schnitt mit z liefert auf z einen Fixpunkt von Γ_z. Wir können Γ_z/Δ_z auffassen als eine zusammenhängende, abgeschlossene, 1-dimensionale Gruppe von Kollineationen der z definierenden Ebene E_z in $PG(3,\mathbb{R})$. Falls Γ_z/Δ_z mindestens 3 Fixpunkte auf z besitzt, dann erhalten wir durch Schneiden von Tangenten in diesen Fixpunkten weitere Fixpunkte von Γ_z in E_z. Nach [Sa 67; TP Cor.3.6] operiert dann Γ_z trivial auf E_z und liegt somit in Δ_z, ein Widerspruch zu $\dim \Gamma_z = 2$. Folglich besitzt Γ_z auf z einen oder zwei Fixpunkte.

b) Besitzt Γ_z auf z genau einen Fixpunkt p, dann ist nach Satz 1.19, z ein Kegelschnitt und die Ebene klassisch. Wir finden im klassischen Modell Δ umfassende Untergruppen der Dimension 5, die diesen Fall realisieren.

c) Γ_z besitze auf z die Fixpunkte p_1, p_2. Dann ist der Schnittpunkt der Tangenten an z in E_z durch p_1 bzw. p_2 ein weiterer Fixpunkt p_3 von Γ_z in E_z.
Durch Entfernen der Geraden $p_2 \vee p_3$ entsteht eine affine Ebene, für deren Achsen wir die Geraden $p_1 \vee p_2$ und $p_1 \vee p_3$ wählen. Einen Punkt aus $z \setminus \{p_1, p_2\}$ legen wir als den Punkt mit den affinen Koordinaten $(1,1)$ fest.
Γ_z/Δ_z operiert auf dieser Ebene wie eine abgeschlossene, zusammenhängende, 1-dimensionale Gruppe von invertierbaren 2×2-Matrizen.
Γ_z/Δ_z besitzt natürlich keine Geradenstücke als Bahnen, und
Γ_z/Δ_z darf in der affinen Ebene keine von p_3 verschiedenen Fixpunkte besitzen (anderenfalls erhalten wir weitere Fixpunkte auf z). Eine ähnliche Situation ist ausführlich in Lemma 1.20 diskutiert worden. Nach [Be 72; S.7] operiert dann Γ_z/Δ_z auf $E_z \setminus p_2 \vee p_3$ wie $\{\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}, d > 0\}$ (k ist hier eine feste reelle Zahle größer 1). Durch $\{(1,1)\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \mid d > 0\}$ ist dann ein Orbit von Γ_z/Δ_z auf z gegeben, nämlich der Teil von z, der im ersten Quadrant des $\mathbb{R}^2$ liegt. Die im zweiten Quadranten liegenden Punkte von z haben die Form $(-\frac{1}{c_1}, c_2)$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$. Indem wir gegebenenfalls Matrizen $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$ anwenden, können wir einen solchen Punkt mit $c_1 = 1$ finden. Dann wird der im zweiten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ liegende Teil von z durch $\{(-1,c)\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix} \mid d > 0\}$ gegeben, und $z \setminus \{p_1, p_2\}$ wird folgendermaßen durch eine reellwertige Funktion f beschrieben:

d) $f(x) = \begin{cases} x^k & \text{für } x \geq 0 \\ c|x|^k & \text{für } x < 0 \end{cases}$ und $z \setminus \{p_2\} = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Solche Funktionen definieren Ovale (siehe Lemma 1.20). ∎

Wir untersuchen nun Ebenen, die eine 5-dimensionale Gruppe von Automorphismen besitzen und auf π einen 3-dimensionalen Ineffektivitätskern besitzen; es wird sich zeigen, daß für 5-dimensionales Γ und 3-dimensionales Δ die zugehörige Laguerreebene klassisch ist. Nach Hilfssatz 1.15 enthält Δ keine der im Brouwer'schen Satz aufgeführten einfachen Gruppen und ist daher auflösbar. Aus demselben Grund ist Γ/Δ und damit auch Γ auflösbar. Da Δ 3-dimensional ist, kann Γ nicht transitiv auf π operieren und läßt daher mindestens eine Unverbindbarkeitsklasse i_{p_0} fest.
Wir unterscheiden drei Fälle:

a) Δ ist abelsch.

2) Δ ist nicht abelsch, und Γ besitzt einen Fixpunkt auf P.

3) Δ ist nicht abelsch, und Γ besitzt keine Fixpunkte auf P.

Satz 4.04: Ist Γ eine 5-dimensionale Gruppe von Automorphismen einer Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einem abelschen, 3-dimensionalen Ineffektivitätskern Δ, dann ist die Ebene klassisch.

Beweis: Nach Lemma 1.05c) besitzt Δ keine zusammenhängenden kompakten Untergruppen. Nach einem Satz von Pontrjagin [Mo 55; Th 1, S.104] ist Δ dann zu $\mathbb{R}^3$ isomorph. Wie im Beweis von Satz 3.03 folgt, daß Δ scharf transitiv auf Z operiert und die Ebene klassisch ist. ∎

Bemerkung 4.05: Die Automorphismengruppe der klassischen Ebene enthält 5-dimensionale Untergruppen, die den Voraussetzungen von Satz 4.04 genügen.
Denn betrachten wir die in Bemerkung 3.04 konstruierte Gruppe T. Diese besitzt auf π einen 3-dimensionalen Ineffektivitätskern Δ_0, und T/Δ_0 ist zu $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorph. Es gibt in der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ bis auf Konjugation [Be 72; S.27] genau eine zusammenhängende, abgeschlossene, 2-dimensionale Untergruppe, nämlich den Stabilisator eines Punktes.
Entsprechend wählen wir in T/Δ_0 eine 2-dimensionale Untergruppe.

Ihr Urbild in T liefert eine 5-dimensionale Gruppe auf die die Voraussetzungen von Satz 4.04 zutreffen.

Wir zeigen nun, daß der Stabilisator eines Punktes in der klassischen Laguerreebene die Ebene bestimmt.

Satz 4.06: Ist Γ eine 5-dimensionale Gruppe von Automorphismen einer Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einem 3-dimensionalen Ineffektivitätskern Δ, die einen Fixpunkt besitzt, dann ist die Ebene klassisch.

Beweis: p_0 bezeichne einen Fixpunkt von Γ. Dann induziert Γ in A_{p_0} eine 5-dimensionale Gruppe und operiert nach geeigneter Koordinatisierung wie die in Bemerkung 0.14a) angegebene Gruppe auf der desarguesschen Ebene A_{p_0}.

Wir beschreiben die Punktmenge der Laguerreebene durch $A_{p_0} \cup i_{p_0}$ und haben zu zeigen, daß die "affinen Anteile" der Zykel in A_{p_0} durch Geraden oder Parabeln beschrieben werden. Die Geraden in A_{p_0}, die nicht Unverbindbarkeitsklassen sind, sind genau die affinen Teile der Zykel durch p_0.

Sei z ein Zykel durch p_0. Die Gruppe Δ_z der Zykelstreckungen an z ist 1-dimensional, und Δ_z besitzt keine nicht auf z liegenden Fixpunkte in der Laguerreebene. Folglich operiert Γ auf $i_{p_0} \setminus \{p_0\}$ fixpunktfrei und zerlegt daher $i_{p_0} \setminus \{p_0\}$ in zwei Orbits.

Bezeichne nun z_1 einen Zykel, der p_0 nicht enthält und B_1 das z_1 enthaltende Orbit von Γ in Z. Wegen der fixpunktfreien Wirkung von Γ auf $i_p \setminus \{p_0\}$, ist B_1 nichttrivial, und aus $\dim B_1 \leq 3$ folgt $\dim \Gamma_{z_1} \geq 2$.

Wir zeigen $\Delta_{z_1} = \{id\}$. Denn Δ_{z_1} induziert eine Gruppe von Kollineationen in A_{p_0}, die die Punktmenge $z_1 \setminus \{z_1 \cap i_{p_0}\}$ punktweise festläßt. In dieser Menge existiert ein Viereck, und nach [Sa 67; TP Cor. 3.6] operiert Δ_{z_1} trivial auf A_{p_0}. Es folgt $\Delta_{z_1} = \{id\}$, und damit gilt $\Gamma = \Delta \cdot \Gamma_{z_1}$ mit $\Delta \cap \Gamma_{z_1} = \{id\}$ und

$3 = \dim \Delta = \dim B_1$.

Da Γ_{z_1} auf z_1 eine effektive 2-dimensionale Gruppe induziert, enthält Γ_{z_1} insbesondere eine 1-dimensionale, abgeschlossene Untergruppe. Auf diese ist Lemma 1.20 anwendbar, und folglich ist $z_1 \setminus \{z_1 \cap i_{p_o}\}$ der affine Anteil eines Ovals O im projektiven Abschluß von A_{p_o}.

Ebenfalls nach 1.20 läßt eine 1-dimensionale, abgeschlossene Untergruppe von Γ_{z_1} genau einen Punkt auf $z_1 \setminus \{z_1 \cap i_{p_o}\}$ fest. Folglich operiert Γ_{z_1} auf $z_1 \setminus \{z_1 \cap i_{p_o}\}$ fixpunktfrei und damit transitiv. Nach Satz 1.19a) und b) ist z_1 ein Kegelschnitt. Da z_1 beliebig gewählt war, sind alle Zykel, die p_o nicht enthalten, "Punkterweiterungen" von Parabeln in A_{p_o}. Folglich ist die Ebene klassisch. ∎

Die Untersuchung der 5-dimensionalen Gruppen von Laguerreautomorphismen mit 3-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ auf Π wird durch den folgenden Satz abgeschlossen.

Satz 4.07: Ist Γ eine 5-dimensionale Gruppe von Automorphismen einer Laguerreebene $(P,Z,\in)$ mit einem 3-dimensionalen nicht abelschen Ineffektivitätskern Δ auf Π, und besitzt Γ keinen Fixpunkt auf P, dann ist die Ebene klassisch.

Beweis: Nach dem Satz von Brouwer kann Γ auf Π nicht transitiv operieren und läßt daher eine Unverbindbarkeitsklasse i_{p_o} fest. Nach Voraussetzung operiert Γ transitiv auf i_{p_o} und induziert wegen 1.15 eine höchstens 2-dimensionale Gruppe auf i_{p_o}. C bezeichne den Ineffektivitätskern dieser Wirkung. Für einen Zykel z gilt $\dim \Gamma_z \geq 2$.

C und Γ_z liegen in $\Gamma_{z \cap i_{p_o}}$. Diese Gruppe ist 4-dimensional, und somit folgt $\dim C_z \geq 1$. Wegen $C \cap \Delta_z = \{id\}$ sehen wir $1 \leq \dim C \cap \Delta \leq 2$. Wir zeigen:

a) $C \cap \Delta$ enthält einen 1-dimensionalen Normalteiler U von Γ. Falls $C \cap \Delta$ 1-dimensional ist, ist nichts zu zeigen. Wir setzen $C \cap \Delta = I$ und nehmen $\dim I = 2$ an. Als 2-dimensionale Untergruppe von Δ besitzt I auf höchstens einer von i_{p_o} verschiedenen Unverbindbarkeitsklasse Fixpunkte (auch dies kann ausgeschlossen werden, wird aber nicht benötigt). Auf fast allen Unverbindbarkeitsklassen operiert I also transitiv und ist folglich zu L_2 oder $\mathbb{R}_2$ isomorph. Falls $I \cong L_2$ wählen wir für U den minimalen Normalteiler von I.
Gelte nun $I \cong \mathbb{R}_2$. Dann induziert $\Gamma/\mathfrak{C}_\Gamma(I)$ eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$. $\mathfrak{C}_\Gamma(I)$ zentralisiert die Ineffektivitätskerne der Darstellungen von I auf den Unverbindbarkeitsklassen $i_q \neq i_{p_o}$ und liegt daher in Δ. $\mathfrak{C}_\Gamma(I)$ umfaßt I. Da Δ nach Voraussetzung nicht abelsch ist, folgt $\mathfrak{C}_\Gamma(I) = I$. Also ist Γ/I isomorph zu $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,c > 0,\ b \in \mathbb{R}\}$. Insbesondere erkennen wir an dieser Matrizendarstellung die Existenz eines 1-dimensionalen Γ-invarianten Normalteilers U in I.
$\mathfrak{C}_\Gamma(U)$ ist ein 4-dimensionaler Normalteiler von Γ.
Im folgenden bezeichne z einen festen Zykel, der p_o nicht enthält.

b) $\mathfrak{C}_{\Gamma_z}(U)$ ist eine mindestens 1-dimensionale Gruppe, die in $A_{z \cap i_{p_o}}$ Translationen in Richtung eines Zykels oder Homologien mit einer Unverbindbarkeitsklasse $i_q \neq i_p$ als Achse induziert. Aus $\dim \Gamma_z \geq 2$ und $\dim \mathfrak{C}_\Gamma(U) = 4$ folgt die Dimensionsaussage. Da U keine Zykel festläßt, folgt $U \cap \mathfrak{C}_{\Gamma_z}(U) = \{id\}$. Besitzt U auf einer von i_{p_o} verschiedenen Unverbindbarkeitsklasse i_q Fixpunkte, dann operiert U trivial auf i_q, und i_q ist Γ-invariant. Wir zeigen, daß dies nicht möglich ist. Aus Dimensionsgründen ist unter den Voraussetzungen des Satzes $\Gamma_z \cap C \subseteq \Gamma_{z,p_o}$ ein mindestens 1-dimensionaler Normalteiler von Γ_z. Denn andernfalls ließe $\Gamma = C \cdot \Gamma_z$ den Punkt $z \cap i_{p_o}$ fest.

Entsprechend ist $\Gamma_z \cap F$ (F Kern der Darstellung von Γ auf i_q) ein Normalteiler von Γ_z. Nach 1.04b) ist $(\Gamma_z \cap C) \times (\Gamma_z \cap F)$ Normalteiler von $\Gamma_z \cdot (\Gamma_z \cap C) \cap \Delta = (\Gamma_z \cap F) \cap \Delta = \{id\}$. Folglich ist $\Gamma_z \cap F$ eine Gruppe von Homologien in $A_{z \cap i_{p_o}}$ mit Achse i_q und Zentrum A_F in $\bar{A}_{z \cap i_{p_o}}$.

$\Gamma_z \cap C$ läßt sich unter diesen Bedingungen aber nicht mehr in $A_{z \cap i_{p_o}}$ realisieren.

Folglich operiert U auf allen von i_{p_o} verschiedenen Unverbindbarkeitsklassen fixpunktfrei. Damit läßt sich die Aussage von b) in $A_{z \cap i_{p_o}}$ erschließen.

c) Gilt $\dim \Gamma_z \cap C = 2$ oder $\dim \Gamma_{z,p_o} = 2$, dann ist z eine Parabel in A_{p_o}. Es genügt, für $\dim \Gamma_{z,p_o} = 2$ die Aussage zu beweisen.

$\Delta_z \cap \Gamma_{z,p_o} = id$, und mit Hilfe von 1.20 erschließen wir, daß Γ_{z,p_o} transitiv auf $z \setminus \{z \cap i_{p_o}\}$ operiert. Aus 1.19 folgt damit c).

Es bleibt, die Alternative $\Gamma_{z,p_o} = \Gamma_z \cap C$ mit $\dim \Gamma_z \cap C = 1$ zu untersuchen.

d) Aus $\dim \Gamma_z \cap C = 1$ folgt $W_1 := \Gamma_z \cap C \subseteq \mathfrak{C}_{\Gamma_z}(U) =: W_2$.

Andernfalls betrachte man die 2-dimensionale Gruppe $W_1 \cdot W_2$. Da U (siehe Beweis von b)) in $A_{z \cap i_{p_o}}$ eine Gruppe von Translationen in Richtung Π induziert, besteht die Gruppe W_2 aus Homologien mit einer Unverbindbarkeitsklasse i_q als Achse. Wie im Beweis von b) sieht man, daß sich W_1 nicht in $A_{z \cap i_{p_o}}$ realisieren läßt.

e) Auch unter der Voraussetzung von d) ist z eine Parabel in A_{p_o}. W_1 zentralisiert nun U. Läßt W_1 einen Punkt q auf

z fest, dann bleibt i_q punktweise fest, und nach 1.04b) liegt W_1 in Δ, ein Widerspruch. Folglich operiert W_1 transitiv auf $z^{\wedge}\{z \cap i_{p_o}\}$, und wir können 1.19 anwenden.

Falls 1.19a) zutrifft, läßt W_1 einen Zykel $\tilde{z}$ (Asymptote an z) durch p_o fest. Dann bleiben auch die U-Bilder von $\tilde{z}$ unter W_1 fest. Ein Zykel $\tilde{z}^u$ $(u \in U)$ muß aber z schneiden und einen Fixpunkt von W_1 auf z liefern.
Folglich trifft 1.19b) zu und z ist als Kegelschnitt erkannt.

∎

Bemerkung 4.08: Es existieren in der Automorphismengruppe der klassischen Ebene 5-dimensionale Untergruppen, die den Voraussetzungen von Satz 4.07 genügen.

Beweis: Die Automorphismengruppe der klassischen Ebene läßt sich in der Form $\Delta \cdot C$ mit 4-dimensionalem Ineffektivitätskern Δ und einer auf Π transitiven zu $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorphen Gruppe schreiben.
Für i_p aus Π ist C_{i_p} eine 2-dimensionale Gruppe. Δ induziert auf i_p eine zu L_2 isomorphe Gruppe; es bezeichne $\tilde{\Delta}$ den 3-dimensionalen Normalteiler von Δ, der auf i_p den minimalen Normalteiler von L_2 induziert. $\tilde{\Delta}$ wird von C_{i_p} normalisiert.

Der 2-dimensionale Ineffektivitätskern von $\tilde{\Delta}$ auf i_p enthält Zykelstreckungen. Folglich kann $\tilde{\Delta}$ nicht abelsch sein.
Die Gruppe $\tilde{\Delta} \cdot C$ genügt nun den Voraussetzungen des Satzes.

∎

Es bleiben noch die ebenen Laguerreebenen mit 5-dimensionalem Γ und 2-dimensionalem Δ zu untersuchen.

Satz 4.09: (P, Z, ϵ) bezeichne eine ebene Laguerreebene mit einer 5-dimensionalen Automorphismengruppe, die auf Π einen 2-dimensionalen Ineffektivitätskern Δ besitzt.
Dann operiert Δ fixpunktfrei auf P.

Beweis: Wir nehmen an, Δ besitze Fixpunkte. Nach 1.06 verteilen sich diese auf höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen.
Die 2-dimensionale Gruppe Δ kann nicht auf zwei Unverbindbarkeitsklassen trivial operieren.

Besitzt also Δ Fixpunkte auf i_p und i_q und liegen auf i_q auch Nichtfixpunkte von Δ, dann bleiben i_p und i_q invariant unter Γ. Da i_q Fixpunkte und Nichtfixpunkte des Normalteilers Δ von Γ enthält, operiert Γ nicht transitiv auf i_q und besitzt also einen Fixpunkt q_o. In A_{q_o} induziert Γ eine 5-dimensionale Kollineationsgruppe, und man sieht mit 0.14, daß Δ dann 3-dimensional ist, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich liegen alle Fixpunkte von Δ in i_p. Da Γ keine Fixpunkte auf i_p haben kann, operiert Δ trivial auf i_p (d.h. $\Delta = I_p$), und Γ bewegt die Punkte auf i_p transitiv. Für $p_o \in i_p$ ist Γ_{p_o} 4-dimensional, umfaßt Δ und ist aus Dimensionsgründen auflösbar. Folglich ist A_{p_o} desarguessch.

Sei $z \in Z$ und $p_o \notin z$. Es folgt $\dim \Gamma_z \geq 2$ und $\Delta_z = \Gamma_z \cap \Delta = \Gamma_z \cap I_p = \{id\}$. Die mindestens 2-dimensionale Gruppe Γ_z operiert auf $i_p \setminus \{z \cap i_p\}$, und somit gilt $\dim \Gamma_{z,p_o} \geq 1$. Nach 1.20 besitzt Γ_{z,p_o} höchstens einen Fixpunkt auf $z \setminus \{z \cap i_p\}$. Da A_{p_o} desarguessch ist, und Δ_z trivial ist, operiert Γ_{z,p_o} auf jedem nichttrivialen Orbit effektiv. Nach 1.20 ist Γ_{z,p_o} also 1-dimensional.
Wie Γ_{z,p_o} läßt dann natürlich auch Γ höchstens eine von i_p verschiedene Unverbindbarkeitsklasse fest.
Wir zeigen: Γ operiert fixpunktfrei auf $\pi \setminus \{i_p\}$ und nehmen an, i_q sei eine von i_p verschiedene Γ-invariante Unverbindbarkeitsklasse.
Dann ist $z \cap i_q$ der eindeutige Fixpunkt von Γ_{z,p_o} auf $z \setminus \{z \cap i_p\}$. Dieser Punkt ist auch Γ_z-invariant. Da wir bereits $\dim \Gamma_{z,p_o} = 1$ wissen, folgt $\dim \Gamma_z = 2$. Auf seinen beiden

nichttrivialen Orbits in z operiert Γ_z effektiv. Läßt nämlich $\gamma \in \Gamma_z$ ein solches Orbit punktweise fest, dann induziert γ in der desarguesschen Ebene $A_{z \cap i_p}$ eine Kollineation, die mindestens "die Hälfte" der "Geraden" $z \setminus \{z \cap i_p\}$ punktweise festläßt. Dann operiert aber γ "trivial" auf z und liegt daher in Δ_z. Wir haben aber bereits $\Delta_z = \{id\}$ bewiesen. Da also Γ_z auf seinen nichttrivialen Orbits in z effektiv operiert, folgt $\Gamma_z \cong L_2$ und als fixpunktfreie Gruppe ist Γ_{z,p_o} normal in Γ_z.
Da für $p_o \in i_p \setminus \{z \cap i_p\}$ die Gruppe Γ_{z,p_o} 1-dimensional ist, kann Γ_z auf i_p keine Fixpunkte besitzen. Folglich operiert der Normalteiler Γ_{z,p_o} trivial auf i_p. Entsprechendes gilt für i_q. Also operiert Γ_{z,p_o} trivial auf $i_p \cup i_q$ und liegt daher (1.04b)) in Δ_z ein Widerspruch.
Folglich operiert Γ/Δ transitiv auf $\pi \setminus \{i_p\}$ und induziert auf π nach Brouwer eine zu $\overbrace{PSL_2(\mathbb{R})}$ isomorphe Gruppe. Der Satz von Levi [Ho 63; Teil II, S.40] liefert $\Gamma = \tilde{\Delta} \cdot C$. Hierbei ist $\tilde{\Delta}$ ein Δ enthaltender, 2-dimensionaler Normalteiler von Γ, und C ist einfach. Die Wirkung von Γ auf i_p impliziert $\Delta \cap C = \{id\}$ und $C \cong \overbrace{PSL_2(\mathbb{R})}$. Wir nehmen im folgenden $\Gamma = \Delta \cdot C$ an.
Δ operiert auf allen von i_{p_o} verschiedenen Unverbindbarkeitsklassen fixpunktfrei (s.o.) und daher transitiv. Es folgt

$$\Delta \cong \begin{cases} L_2 \\ \text{oder} \\ \mathbb{R}_2 \end{cases} .$$

a) Aus $\Delta \cong L_2$ folgt mit 0.17 $\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta) \cap \Delta = \{id\}$ und $\dim \mathfrak{C}_\Gamma(\Delta) = 3$. Ohne Einschränkung dürfen wir $\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)$ als Levikomplement wählen und erhalten $\Gamma = \Delta \times C$.
Für $i_q \neq i_p$ gilt $C_{i_q} \cong L_2$. Da C_{i_q} auf den Unverbindbarkeitsklassen i_q^c $(c \in \mathbb{Z}(C))$ gleich operiert, induziert

C_{i_q} eine zu L_2 isomorphe Gruppe auf i_q. q ist Fixpunkt von $C_q \subset C_{i_q}$ und ist auch Fixpunkt von Δ, da Δ die Gruppe C_q zentralisiert. Wir hatten aber bereits eingangs gezeigt, daß Δ fixpunktfrei auf $P \setminus i_p$ operiert.

b) Gelte $\Delta \cong \mathbb{R}^2$.
C operiert durch Konjugation auf Δ. Ist diese Wirkung trivial, dann können wir wie in a) einen Widerspruch erreichen. Wir dürfen also annehmen $\mathfrak{C}_C(\Delta) \subsetneq C$. $C/\mathfrak{C}_C(\Delta)$ ist eine einfache Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ und daher zu $SL_2(\mathbb{R})$ isomorph. Es folgt $\mathfrak{C}_C(\Delta) \cong \mathbb{Z}$.
Sei $c \in \mathfrak{C}_C(\Delta) \setminus \{id\}$. Dann liegt c im Zentrum von C und operiert daher fixpunktfrei auf $\Pi \setminus \{i_p\}$. Folglich erhalten wir $I_q = (I_q)^{c^n} = I_{qc^n}$, d.h. I_q operiert trivial auf den Unverbindbarkeitsklassen $i_q, i_q^c, i_q^{c^2} \ldots$, ein Widerspruch.

Damit ist der Beweis von 4.09 abgeschlossen. ∎

Satz 4.10: Eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ läßt keine 5-dimensionale Gruppe Γ von Automorphismen zu, für die Δ eine 2-dimensionale nicht abelsche Gruppe ist.

Beweis: Nach Satz 4.09 operiert Δ fixpunktfrei auf P und daher transitiv auf jeder Unverbindbarkeitsklasse.
Da Δ nicht abelsch ist, kann Δ auf höchstens 2 Unverbindbarkeitsklassen $\mathbb{R}$ induzieren. Denn induziert Δ auf 3 Unverbindbarkeitsklassen $i_{p_1}, \ldots, i_{p_3}$ eine zu $\mathbb{R}$ isomorphe Gruppe, dann können wir i_{p_i}, i_{p_j} $(i,j \in \{1,2,3\})$ finden, so daß I_{p_i} und I_{p_j} Normalteiler von Δ sind mit der Identität als Durchschnitt. I_{p_i} und Δ induzieren die gleiche Gruppe auf i_{p_j}, d.h. $\Delta = I_{p_i} \times I_{p_j}$ ist abelsch im Widerspruch zur Voraussetzung.

Δ induziert also auf fast allen Unverbindbarkeitsklassen L_2. Da ein diskreter Ineffektivitätskern von Δ Normalteiler in Γ ist, induziert Δ auf allen Unverbindbarkeitsklassen i_p, die in einem nichttrivialen Orbit von Γ liegen, effektiv L_2.

T bezeichne im folgenden den minimalen Normalteiler von Δ. Durch Konjugation induziert Γ eine Gruppe von stetigen Automorphismen von Δ. Die Gruppe Δ operiert hierbei treu auf sich. Nach Lemma 0.17d) induziert Γ/Δ auf Δ eine Gruppe der Ordnung ≤ 2. Da Γ als zusammenhängend vorausgesetzt wird, folgt $\Gamma = \Delta \times C$ mit $C := \mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)$.

Jedes Element δ aus $\Delta \setminus T$ ist Zykelstreckung mit einem Element z^δ aus Z als Fixpunktmenge. Für nicht vertauschbare δ, δ' aus $\Delta \setminus T$ sind z^δ und $z^{\delta'}$ disjunkt. Wegen der Transitivität von Δ auf den Unverbindbarkeitsklassen, liegt jeder Punkt p aus P auf einem Zykel der Form z^δ. Da C mit Δ, also insbesondere mit δ aus $\Delta \setminus T$ vertauscht, läßt C jeden Zykel z^δ fest. Sind p,q Punkte aus z^δ, dann läßt $C_{p,q}$ die Klassen i_p und i_q punktweise fest und liegt nach 1.04b) in $\Delta \cap C = \{id\}$. Es folgt $C_{p,q} = \{id\}$.

Insbesondere kann dann C auf z höchstens einen Fixpunkt haben und ist daher zu $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ oder zu $\widetilde{PSL_2(\mathbb{R})}$ isomorph. In jedem dieser Fälle ist aber $C_{p,q}$ 1-dimensional im Widerspruch zu $C_{p,q} = \{id\}$. Damit ist der Satz bewiesen. ∎

Satz 4.11: Eine ebene Laguerreebene $(P,Z,\in)$ läßt keine 5-dimensionale Gruppe Γ von Automorphismen zu, für die Δ zu $\mathbb{R}^2$ isomorph ist.

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis.

Nach 4.09 operiert Δ fixpunktfrei und damit transitiv auf allen Unverbindbarkeitsklassen. Mit $\tilde{\Delta}$ bezeichnen wir den Ineffektivitätskern von Γ auf Π. $\tilde{\Delta}$ ist ein 2-dimensionaler, Δ umfassender Normalteiler von Γ für den $\tilde{\Delta}/\Delta$ total unzusammenhängend ist. Die Untergruppe I_p von Δ läßt höchstens zwei Unverbindbarkeitsklassen i_p und $i_{q(p)}$ punktweise fest ($i_{q(p)}$ kann mit i_p zusammenfallen).

a) Γ operiert transitiv auf Π und $\Gamma/_{\tilde{\Delta}}$ ist zu $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ isomorph.
Denn andernfalls existiert ein p_o mit $(i_{p_o})^\Gamma = i_{p_o}$.
Die 5-dimensionale Gruppe Γ induziert auf i_{p_o} eine transitive, höchstens 3-dimensionale Gruppe mit Kern N. Δ induziert auf i_{p_o} eine 1-dimensionale Gruppe mit Kern I_{p_o}.
Es folgt $I_{p_o} = N \cap \Delta$. $\bar{\Gamma} := \Gamma/_{\Delta}$ ist einfach. N induziert in $\bar{\Gamma}$ einen mindestens 1-dimensionalen Normalteiler $\bar{N}$; es folgt $\bar{N} = \bar{\Gamma}$ oder $\Gamma = N \cdot \Delta$. Somit ist N ein 4-dimensionaler nicht auflösbarer Normalteiler von Γ, der p_o festläßt. Nach 0.14 ist A_{p_o} nicht desarguessch und daher nach [Sa 67, TP; Th.5.6] eine Moultonebene. Ebenfalls nach [Sa 67, TP; Th.4.8] läßt N genau einen Punkt a aus $P \setminus i_{p_o}$ fest.
Da N normal in Γ ist, und Γ die Klasse i_{p_o} festläßt, bleibt auch a unter Γ fest im Widerspruch zu 4.09.
Folglich operiert Γ transitiv auf Π und induziert nach Brouwer eine der Gruppen $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$.

b) Durch Konjugation induziert Γ auf Δ eine zu $SL_2(\mathbb{R})$ isomorphe Gruppe.
Da Δ nicht im Zentrum von Γ liegt, ist $\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)$ eine echte Untergruppe von Γ. Wegen der Einfachheit von $\Gamma/_{\Delta}$ ist $\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)$ ein 2-dimensionaler Δ umfassender Normalteiler von Γ.
Die 3-dimensionale, einfache Gruppe $\Gamma/_{\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)}$ operiert durch Konjugation treu auf Δ, aufgefaßt als Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und liegt somit in $GL_2(\mathbb{R})$.
Nach [Be 72; S.7ff] ist $\Gamma/_{\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)}$ zu $SL_2(\mathbb{R})$ isomorph.

c) Γ ist semidirektes Produkt von Δ mit einer Gruppe C, und C ist zu $\overline{PSL_2(\mathbb{R})}$ oder $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ isomorph.

Nach a) ist $\Gamma/\tilde{\Delta}$ einfach, und die Normalteiler von $\Gamma/\tilde{\Delta}$ sind zyklische, endliche Gruppen. Ein zusammenhängeder Normalteiler von Γ liegt daher in $\tilde{\Delta}$. Nach Definition ist $\tilde{\Delta}/\Delta$ total unzusammenhängend. Folglich liegt ein zusammenhängender Normalteiler von Γ sogar in Δ. Also ist Δ der maximale, zusammenhängende, auflösbare Normalteiler von Γ. Nach [Ho 63; Teil II, S.40] existiert eine Zerlegung $\Gamma = \Delta \cdot C$ mit $\dim C = \dim \Gamma - \dim \Delta = 3$. Als nulldimensionale Untergruppe von C liegt $\Delta \cap C$ im Zentrum von C. Durch Konjugation induziert C auf Δ dieselbe Gruppe wie Γ, nämlich $SL_2(\mathbb{R})$. Diese Gruppe läßt nur den "Nullvektor" in $\Delta \cong \mathbb{R}^2$ fest. Es folgt $\Delta \cap C = \{id\}$. Nach der Klassifizierung der dreidimensionalen, zusammenhängenden (reellen) Liegruppen [Be 72; S.65] ist C zu einer Überlagerungsgruppe der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorph, und ihr maximaler Normalteiler ist zyklisch.

d) Es gilt $\Gamma/\tilde{\Delta} \cong PSL_2^{(k)}(\mathbb{R})$ mit $k \leq 2$.

Nach a) gilt $PSL_2^{(k)}(\mathbb{R}) \cong \Gamma/\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}\cdot C/\tilde{\Delta} \cong C/C\cap\tilde{\Delta}$. Wir nehmen an, $k \geq 3$.

$\langle c_o \rangle = Z(C)$ zerlegt Π in Orbits der Länge k, und $C \cap \tilde{\Delta} = \langle c_o^k \rangle$.

Aus $\Gamma = \mathfrak{C}_\Gamma(\Delta)\cdot C$ folgt mit b) $SL_2(\mathbb{R}) \cong \Gamma/\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta) \cong C/C\cap\mathfrak{C}_\Gamma(\Delta) = C/\mathfrak{C}_C(\Delta)$. Folglich ist $\mathfrak{C}_C(\Delta)$ Untergruppe vom Index 2 von $Z(C)$, und $Z(C)$ normalisiert alle Gruppen I_p.

Insbesondere gilt $I_p = I_p^{c_o^i} = I_{p^{c_o^i}}$ $(0 \leq i < k)$. Da die Klassen $p^{c_o^i}$ $(0 \leq i < k)$ alle verschieden sind und $k \geq 3$, folgt mit 1.04 ein Widerspruch und damit die Aussage d).

e) Es gilt $\Gamma/\tilde{\Delta} \neq PSL_2(\mathbb{R})$.

Wir argumentieren wieder mit Widerspruch und nehmen an $PSL_2(\mathbb{R}) \cong \Gamma/\tilde{\Delta} \cong C/C\cap\tilde{\Delta}$.

Aus der (gruppentheoretischen) Einfachheit von $PSL_2(\mathbb{R})$ folgt $C \cap \tilde{\Delta} = Z(C) = \langle c_o \rangle$. Aus der Struktur der Gruppe $PSL_2(\mathbb{R})$ folgt $C_{i_p} = (C_{i_p})_1 \times Z(C)$ mit $(C_{i_p})_1 \cong L_2$. Nehmen wir an der maximale Normalteiler von $(C_{i_p})_1$ operiere fixpunktfrei auf i_p. Dann besitzt jedes seiner Komplemente genau einen Fixpunkt auf i_p (und jeder Punkt auf i_p ist Fixpunkt eines solchen Komplements), und dieser ist dann auch Fixpunkt von c_o. Dann operiert aber c_o trivial auf i_p und entsprechend auf P; ein Widerspruch.
Da der maximale Normalteiler von $(C_{i_p})_1$ die Gruppe Δ in ihrer Wirkung auf i_p zentralisiert, kann dieser nur trivial auf i_p operieren. Die Gruppe $\Delta \cdot C_{i_p}$ induziert auf i_p eine zu L_2 isomorphe Wirkung (dies folgt aus der Konjugationswirkung von C_{i_p} auf Δ und der Transitivität von Δ auf i_p) mit C_{i_p} als einem Komplement. Folglich läßt C_{i_p} genau einen Punkt auf i_p fest, dieser ist dann auch Fixpunkt von c_o, und es folgt wie oben $c_o = id$, ein Widerspruch.

f) Es gilt $\Gamma/\tilde{\Delta} \neq PSL_2^{(2)}(\mathbb{R})$.
Nehmen wir an, $PSL_2^{(2)}(\mathbb{R}) \cong \Gamma/\tilde{\Delta} \cong C/C \cap \tilde{\Delta}$. Dann hat $C \cap \tilde{\Delta}$ Index 2 in $Z(C) = \langle c_o \rangle$. C induziert auf Δ eine zu $SL_2(\mathbb{R})$ isomorphe Gruppe, und somit hat auch $\mathfrak{C}_C(\Delta)$ Index 2 und fällt daher mit $C \cap \tilde{\Delta}$ zusammen. Es gilt $C_{i_p} = (C_{i_p})_1 \times \langle c_o^2 \rangle$.
Analyse der Wirkung von C_{i_p} auf i_p wie in e) ergibt $c_o^2 = id$.
Die Gruppe $\Delta \cdot C_{i_p}$ induziert eine auflösbare, transitive, zusammenhängende Gruppe auf i_p und ist somit zu $\mathbb{R}$ oder L_2 isomorph.

Δ induziert hierbei eine 1-dimensionale Gruppe C_{i_p} eine höchstens 1-dimensionale Gruppe, die im Falle der nichttrivialen Wirkung einen Punkt aus i_p festläßt. In jedem Fall operiert der maximale Normalteiler von C_{i_p} trivial auf i_p und dann natürlich auch auf $i_p^{C_o}$. Nach 1.4b) liegt dieser Normalteiler in $\tilde{\Delta}$. Folglich enthält Δ eine 1-dimensionale Untergruppe von C, ein Widerspruch zu c).
Damit ist der Beweis von Satz 4.11 abgeschlossen. ∎

Literatur

[Be 72] BETTEN, D.: TOPOLOGISCHE TRANSFORMATIONSGRUPPEN. Skriptum Tübingen, WS 1972/73.

[BHL 80] BUCHANAN, T., HÄHL, H. LÖWEN, R.: TOPOLOGISCHE OVALE. Geometriae Dedicata, 9, 401-424 (1980).

[Gr 68] GROH, H.: TOPOLOGISCHE LAGUERREEBENEN I. Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd.32, 216-231 (1968).

[Gr 69] ——— : TOPOLOGISCHE LAGUERREEBENEN II. Abh. Math. Sem. Hamburg, Bd.34, 11-21 (1969).

[Gr 74] ——— : OVALS AND NON-OVOIDAL LAGUERRE PLANES. Journal reine und angewandte Math., Bd.267, 50-66 (1974).

[Ha 83] HARTMANN, E.: EBENE ZYKELGEOMETRIEN. Skriptum Darmstadt, 1983.

[Ha 84] ——— : OVOIDE UND MÖBIUSEBENEN ÜBER KONVEXEN FUNKTIONEN. Geometriae Dedicata, 15, 377-388 (1984).

[Ho 63] HOFMANN, K.H.: EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER LIE-GRUPPEN I, II. Skriptum Tübingen, 1962-1963.

[H.-P. 73] HUGHES, D. - F. PIPER: PROJECTIVE PLANES. Springer, New York 1973.

[Iw 49] IWASAWA, K.: SOME TYPES OF TOPOLOGICAL GROUPS. Ann. of Math., 50, 507-580 (1949).

[M 67] MÄURER, H.: MÖBIUS- UND LAGUERRE-GEOMETRIEN ÜBER SCHWACH KONVEXEN SEMIFLÄCHEN. Math. Z., 98, 355-386 (1967).

[M 77] MÄURER, H.: DIE BEDEUTUNG DES SPIEGELUNGSBEGRIFFS IN DER MÖBIUS- UND DER LAGUERRE-GEOMETRIE. Beiträge zur Geometrischen Algebra, 251-258 (1977).

[MO 55] MONTGOMERY, D. - L. ZIPPIN: TOPOLOGICAL TRANSFORMATION GROUPS. Intersience, New York 1955.

[PO 57] PONTRJAGIN, L.S.: TOPOLOGISCHE GRUPPEN I, II. Teubner, Leipzig, 1957/1958.

[SA 63] SALZMANN, H.: ZUR KLASSIFIKATION TOPOLOGISCHER EBENEN. Math. Ann., 150, 226-241 (1963).

[SA 67] _____ : TOPOLOGICAL PLANES. Advances in Math., 2, 1-60 (1967).

[SCH 77] SCHENKEL, A.: DIFFERENZIERBARE MÖBIUS- UND LAGUERRE-EBENEN. Diplomarbeit Erlangen, 1977.

[SCH 80] _____ : TOPOLOGISCHE MINKOWSKIEEBENEN. Dissertation Erlangen, 1980.

[ST 70] STRAMBACH, K.: SPHÄRISCHE KREISEBENEN. Math. Z., 113, 266-292 (1970).

[ST 72] _____ : SPHÄRISCHE KREISEBENEN MIT DREIDIMENSIONALER NICHT EINFACHER AUTOMORPHISMENGRUPPE. Math. Z., 124, 289-314 (1972).

[ST 73] _____ : SPHÄRISCHE KREISEBENEN MIT EINFACHER AUTOMORPHISMENGRUPPE. Geometriae Dedicata, Vol.1, 182-219 (1973).

[STE 85] STEINKE, G. : EINE FAMILIE LOKALKOMPAKTER 4-DIMENSIONALER TOPOLOGISCHER LAGUERRE-EBENEN.
Preprint Math. Seminar Kiel, (1985).

[TI 62] TITS, J. : OVOÏDES À TRANSLATIONS.
Rend. Mat., 21, 37-59 (1962).

Lebenslauf

Am 4. April 1956 wurde ich als Tochter des Steuerberaters Fritz Pfüller und dessen Ehefrau Babette Pfüller, geborene Heinrichs, in Mönchengladbach-Rheindahlen geboren.
Von Juli 1977 bis Oktober 1982 war ich mit dem Physiker Kurt Schad verheiratet.

Nach der Grundschule in Wassenberg (1963-1966) besuchte ich das Mädchengymnasium in Erkelenz, wo ich im Juni 1975 die Reifeprüfung ablegte.

Vom Wintersemester 1975/76 bis Sommersemester 1981 studierte ich Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt.
Im Juni 1978 legte ich das Vordiplom, im Juli 1981 das Diplom in Mathematik ab.

Als wissenschaftliche Hilfskraft war ich von Oktober 1981 bis September 1982 an der Technischen Hochschule Darmstadt tätig.
In der Zeit vom Oktober 1982 bis Juli 1985 war ich als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Technischen Hochschule Darmstadt angestellt.

Seit August 1985 bin ich bei der Siemens Aktiengesellschaft in München-Neuperlach beschäftigt.

Offsetdruck · Fotodruck · Hogl · Hauptstraße 109 · 8520 Erlangen · Tel.09131/22990